2.4 Espace engendré

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs d'un EV $(E; +; \cdot)$

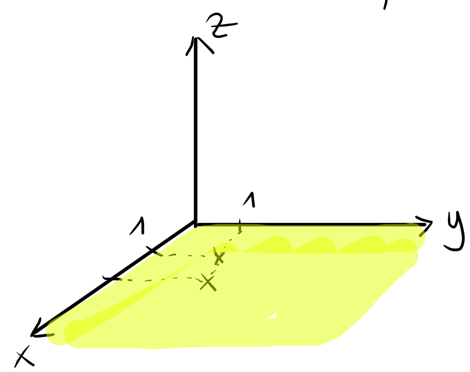
Déf : L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_n$ est l'espace engendré par $u_1, \dots, u_n$, noté $\langle u_1; u_2; \dots; u_n \rangle$

On dit aussi que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une famille génératrice de E

Thm : $\langle u_1; u_2; \dots; u_n \rangle$ est un SEV de E

Exples :

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $\langle (1;0;0); (0;1;0) \rangle$ est le "sol", le plan d'équation $z=0$



2) $\langle (1;0); (0;1) \rangle$ est $\mathbb{R}^2$ (dans $\mathbb{R}^2$)

3) L'ensemble des solutions de l'équation $\underbrace{2x - y = 0}$ (dans $\mathbb{R}^2$) est $\langle (1;2) \rangle$.

$$\begin{cases} x = k/2 \\ y = k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = m \\ y = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{ (1;2) \cdot m \mid m \in \mathbb{R} \}$$
$$= \langle (1;2) \rangle$$

2.5 Base d'un espace vectoriel

Déf : Soit $(E;+;\cdot)$ un EV.

Une base de E est une famille $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ libre et qui engendre E.

Exple : Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\langle (1;0;0);(0;1;0);(0;0;1) \rangle = \mathbb{R}^3$

Thm : Soit $\mathcal{B}$ une base d'un EV E

Alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Ainsi $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Ex 1.2.17

a) $e_1 = (1;1)$ $e_2 = (1;0)$ et $u = (0;1) = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

1) $\mathcal{B}$ est libre 2) $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^2$

1) $\lambda_1(1;1) + \lambda_2(1;0) = (0;0)$

$(\lambda_1 + \lambda_2 ; \lambda_1) = (0;0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ libre ✓

2) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, déterminons α et β tels que

$$(x;y) = \alpha(1;1) + \beta(1;0)$$
$$= (\alpha+\beta ; \alpha)$$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = x \\ \alpha = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = x - y \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y) = y(1;1) + (x-y)(1;0) \Leftrightarrow (x;y) = y e_1 + (x-y)e_2$

$= \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$

1.2.18

a) $e_1 = (1;1;-1)$ $\quad e_2 = (1;-1;0)$ $\quad e_3 = (1;0;1)$

1) $\mathcal{B}$ est libre : $\quad \lambda_1(1;1;-1) + \lambda_2(1;-1;0) + \lambda_3(1;0;1) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) - 1(1+1) + 0$$

$$= -1 - 2 = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la solution est unique $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

2) $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^3$: $\quad (x;y;z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \alpha(1;1;-1) + \beta(1;-1;0) + \gamma(1;0;1)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha - \beta \\ z = -\alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Résoudre avec P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 + L_1 \to L_3}{\overset{L_2 - L_1 \to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\ldots \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - 2y - z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$\overset{1) \text{ et } 2)}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$u = (\overset{x}{0}; \overset{y}{1}; \overset{z}{0}) \Rightarrow u = \overbrace{\tfrac{1}{3}(0+1-0)}^{\alpha} e_1 + \overbrace{\tfrac{1}{3}(0-2-0)}^{\beta} e_2 + \overbrace{\tfrac{1}{3}(0+1+0)}^{\gamma} e_3$$

$$= \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

1.2.17 et 1.2.18