Dimension

1) EV : Toutes les bases d'un EV ont le même nombre d'éléments.

Déf : Ce nombre s'appelle la dimension de l'EV

Exple : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ car $\mathcal{B} = ((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1))$

$\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ car $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$

$\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$

Par convention l'EV $\{0\}$ est de dim 0

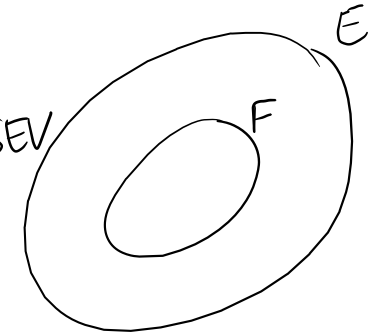
Thms : Soit E un EV de dim n

1) tout ensemble de m vecteurs avec $m > n$, est lié.
2) tout ensemble de n vecteurs libres est une base de E.
3) " " " " qui engendrent E est une base de E.

Rem : Si $\dim(E) = n$, le thm 2) revient à dire que si $(e_1; \dots; e_n)$ est tel que $\mathrm{Det}(e_1; \dots; e_n) \neq 0$ alors $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ est une base de E.

2) SEV :

Soit F un SEV de E.



1) $\dim(F) \leqslant \dim(E)$

2) $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$

Exples

- Donner une base de l'espace engendré par les solutions du système et en déduire la dim.

$$\begin{cases} 5x + y + 5z = 0 \\ -2y + 10z = 0 \\ -x + 2y - 12z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \\ -1 & 2 & -12 & 0 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}L_2 \to L_2}{\overset{-L_3 \to L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 - 5L_1 \to L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 11 & -55 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 + 2L_2 \to L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 5k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow S = \{(-2k; 5k; k) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (-2;5;1) \rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \big((-2;5;1)\big) \text{ et } \dim(S) = 1$$

- Soit F un espace engendré par $f_1=(5;0;-1)$, $f_2=(1;-2;2)$ et $f_3=(5;10;-12)$, $F=\langle f_1;f_2;f_3\rangle$

SEV de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une base et la dimension de F

$\dim(F) \leqslant 3$ $\quad$ (si $\dim(F)=3 \Leftrightarrow F=\mathbb{R}^3$)

<u>1e méthode</u> : . On essaie de voir si les 3 vecteurs sont liés (ou libres)

$$\alpha f_1+\beta f_2 \overset{?}{=} f_3 \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha+\beta=5 \\ -2\beta=10 \\ -\alpha+2\beta=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ils sont liés : $2f_1-5f_2=f_3$ $\Rightarrow$ f_1, f_2, f_3 ne forment pas une base

. Il reste à voir que f_1 et f_2 sont libres. $\Rightarrow$ $\dim(F)\leqslant 2$

Comme il n'y a que 2 vecteurs et que l'un n'est pas multiple de l'autre, ils sont libres.

$\Rightarrow B=(f_1;f_2) \Rightarrow \dim(F)=2$

<u>2e méthode</u> : Pour déterminer une base d'un espace engendré par des vecteurs, on considère la matrice échelonnée réduite de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs.

Les colonnes pivots sont libres, et les autres colonnes liées.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \end{array} \sim \cdots \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \end{array}$$

idem exple 1.

libres

liés : $e_3=2e_1-5e_2$

valable aussi pour f_1, f_2 et f_3

$\Rightarrow$ f_1 et f_2 sont libres $\Rightarrow B=(f_1;f_2) \Rightarrow \dim(F)=2$

ex 1.2.21 / 22 / 26