Ex 2.6.1

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

zéro : -2 et $\cancel{1}$ (2)

cond : $(x+3)(x-1) \neq 0$
$\quad -3 \quad 1$ (v.i.)

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$

2) signe :

x		-3		-2		1	
sgn(f)	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖ (2)	$+$

$f(1000) = \frac{+}{+}$

3) AV/trou : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{4}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = -3$ est une AV

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ il y a un "trou" en $(1; \frac{3}{4})$

AH : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1 \Rightarrow y = 1$ est une AH

position relative de f p.r. à l'AH : $\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} - \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3} = \dfrac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$

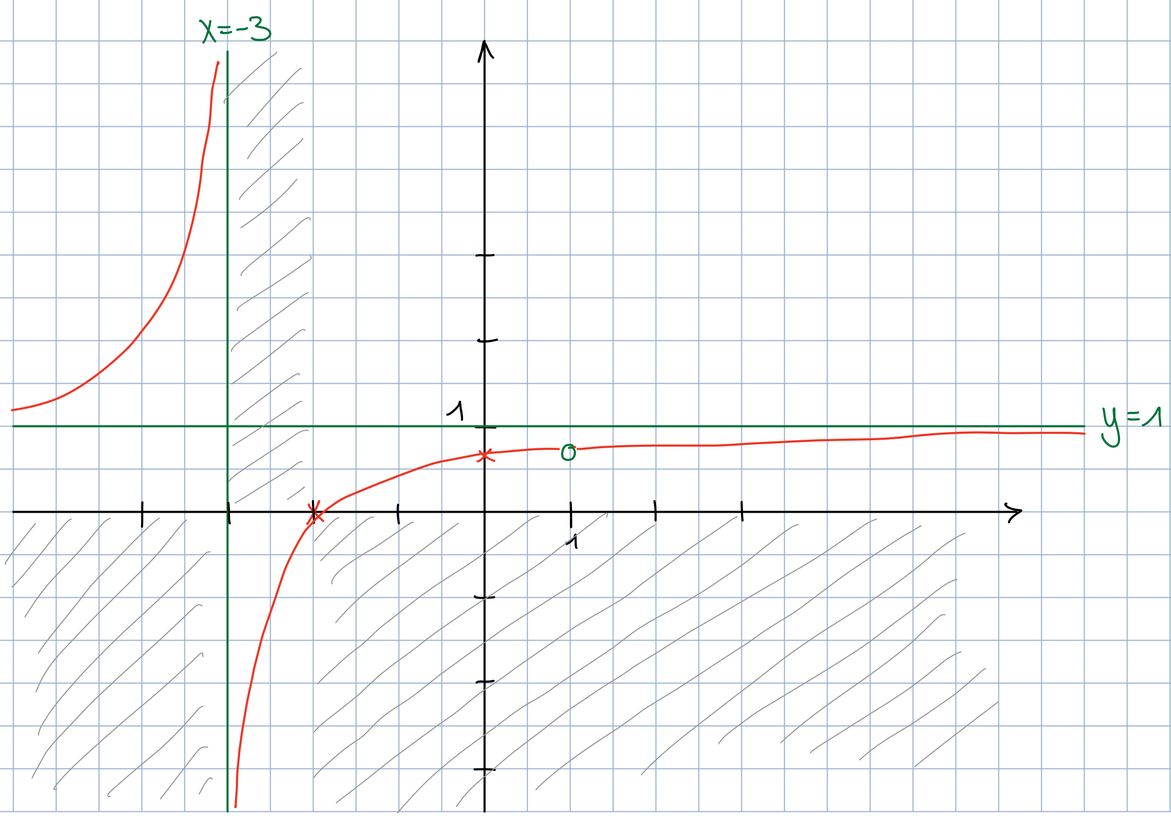
zéro : $\cancel{1}$ de δ

$\hat{m}$ v.i.

x		-3		1	
sgn(δ)	$+$	‖	$-$	‖ (2)	$-$
pos(f)	dessus		dessous		dessous

4) graphe :

ord. à l'or. :
$f(0) = \frac{2}{3}$



b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ ← $\Delta = -3 < 0$ pas de zéro
← v.i. : 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2) signe de f :

x		2	
sgn(f)	$-$	‖	$+$

3) AV / trou : $\lim_{x\to 2} f(x) = "\dfrac{7}{0}" = \infty \Rightarrow$ $x = 2$ est une AV

AH/AO : $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ pas d'AH

AO car $\deg(N) = 2 = \deg(D) + 1 = 1+1$ ✓

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+3 \\ \cline{1-1} 3x+1 & \\ -3x+6 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x+3+\dfrac{7}{x-2}$

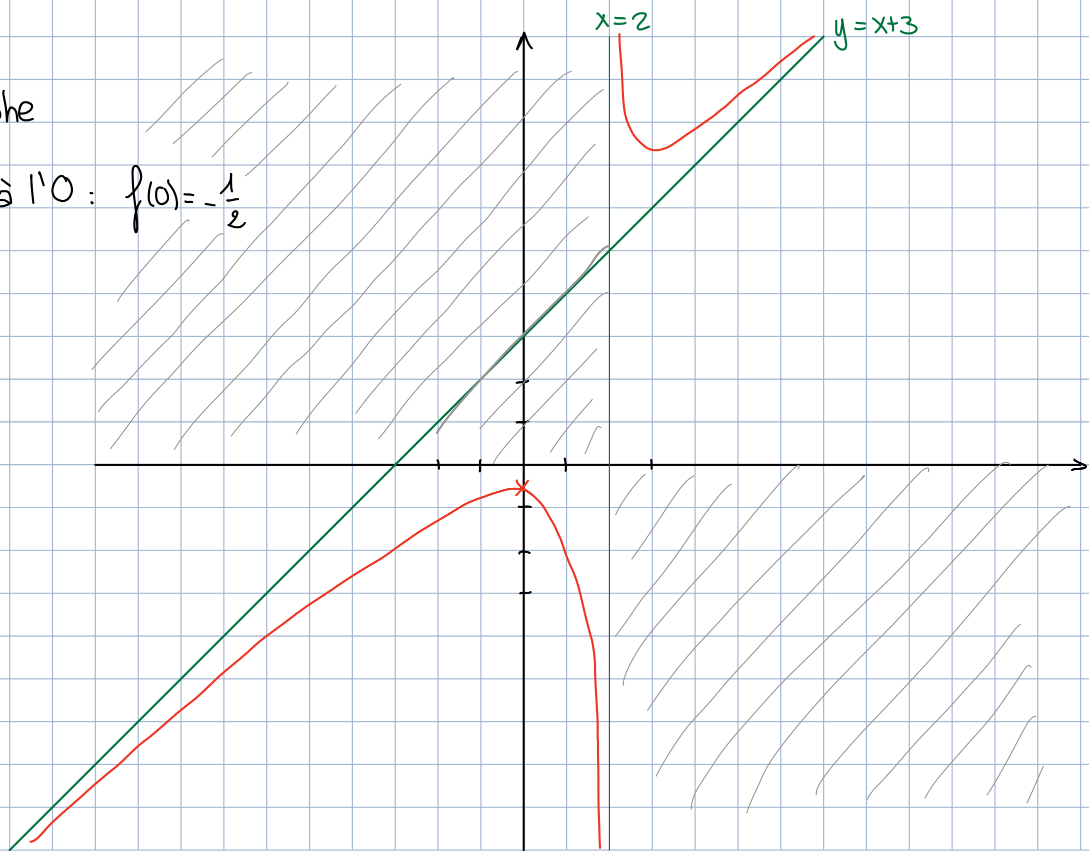
$\Rightarrow$ $y = x+3$ est l'AO et $\delta(x) = \dfrac{7}{x-2}$ ← pas de zéro
← v.i : 2

position relative de f p.r. à l'AO :

x		2	
sgn(δ)	$-$	‖	$+$
pos(f)	dessous		dessus

4) graphe

ord. à l'O : $f(0) = -\frac{1}{2}$



c) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+3)}{(x+2)^2}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ cond : $(x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ (2)

2) Signe : zéro : $2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

x		-3		-2		0	
sgn(f)	+	0	−	‖	−	0	+

(2)

AV/ trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{-4}{0_+} = -\infty \Rightarrow x = -2$ est une AV

AH : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}_1} = 2 \Rightarrow y = 2$ est une AH

position relative :

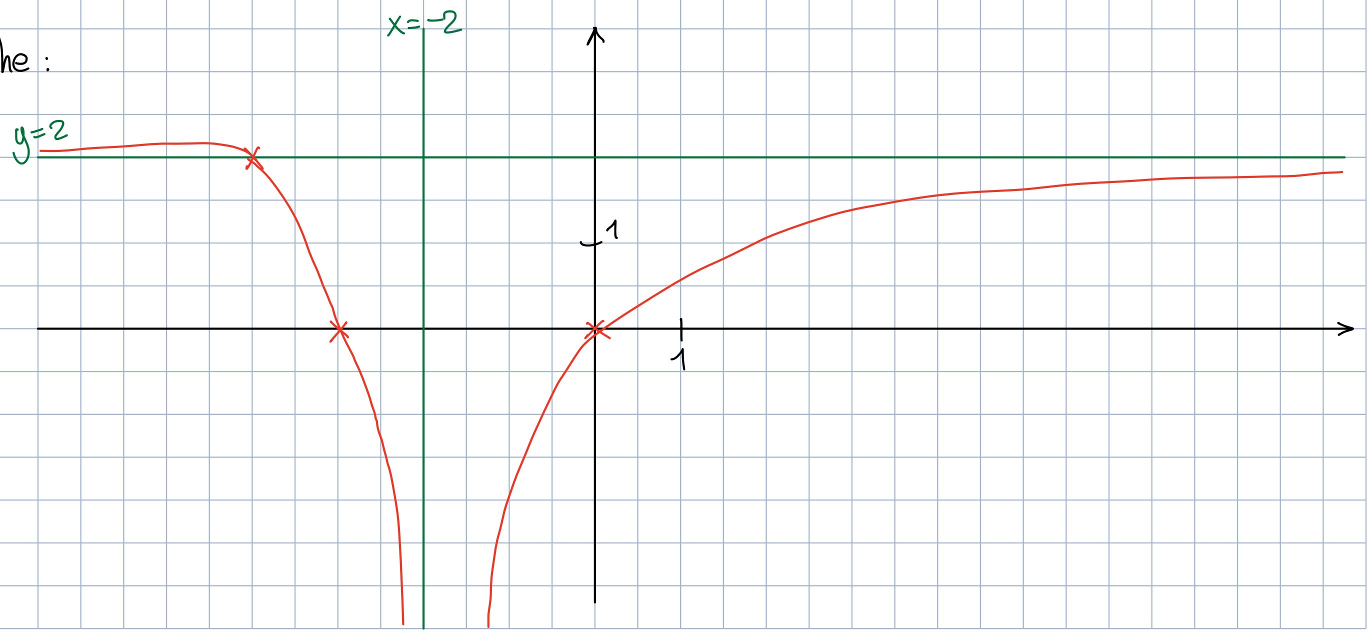
$\delta(x) = f(x) - 2 = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2} - \dfrac{2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+6x-2x^2-8x-8}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{-2x-8}{(x+2)^2} = \dfrac{-2(x+4)}{(x+2)^2}$ zéro : -4 v.i. : -2 (2)

x		-4		-2	
sgn(δ)	+	0	−	‖	−
pos(f)	dessus	∩	dessous	(2)	dessous

$(-4 ; 2)$ car $y = 2$

4. graphe :



d) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{x^3}{(2-x)(2+x)}$ zéro : 0 (3)

v.i. : ± 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) signe

x		-2		0		2	
$sgn(f)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

3) AV/trou : $\lim_{x\to -2} f(x) = "\dfrac{-8}{0}" = \infty \Rightarrow x=-2$ est une AV

$\lim_{x\to 2} f(x) = "\dfrac{8}{0}" = \infty \Rightarrow x = 2$ est une AV

AH/AO : AO car $deg(N) = 3$ et $deg(D) = 2$

x^3	$-x^2+4$
$-x^3+4x$	$-x$
$4x$	

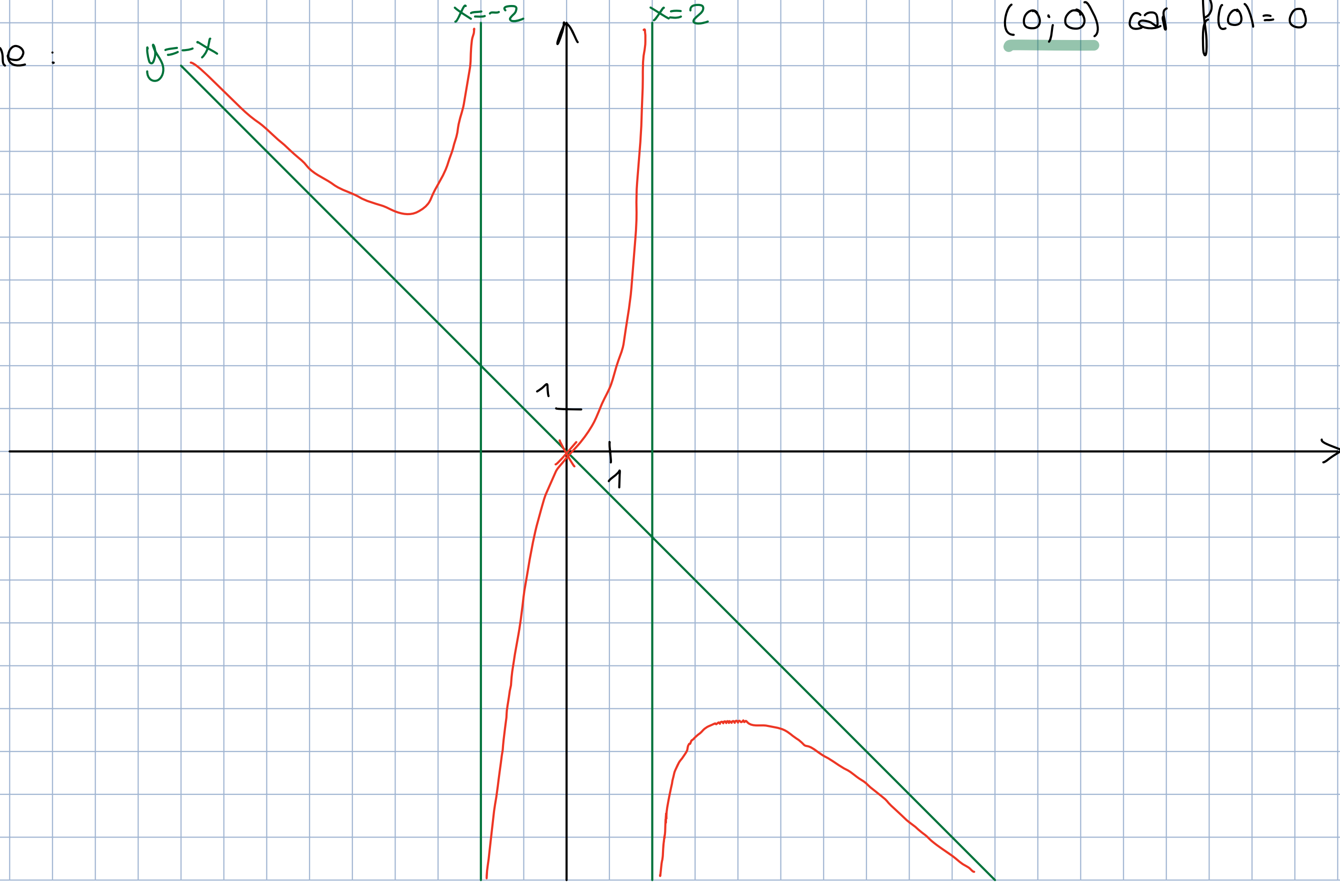
$\Rightarrow f(x) = -x + \underbrace{\dfrac{4x}{4-x^2}}_{=\delta(x)}$

$\Rightarrow$ AO : $y = -x$ et

x		-2		0		2	
$sgn(\delta)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$
$pos(f)$	dessus	$\|$	dessous	$\cap$	dessus	$\|$	dessous

$(0;0)$ car $f(0) = 0$

4) graphe :



e) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$ ← zéro : 0 et 4 ← v.i. 1 et 3

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1;3\}$

2) signe :

x		0		1		3		4	
sgn(f)	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+

3) AV/trou : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{-3}{0} = \infty \Rightarrow x=1$ est une AV

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{-3}{0} = \infty \Rightarrow x=3$ est une AV

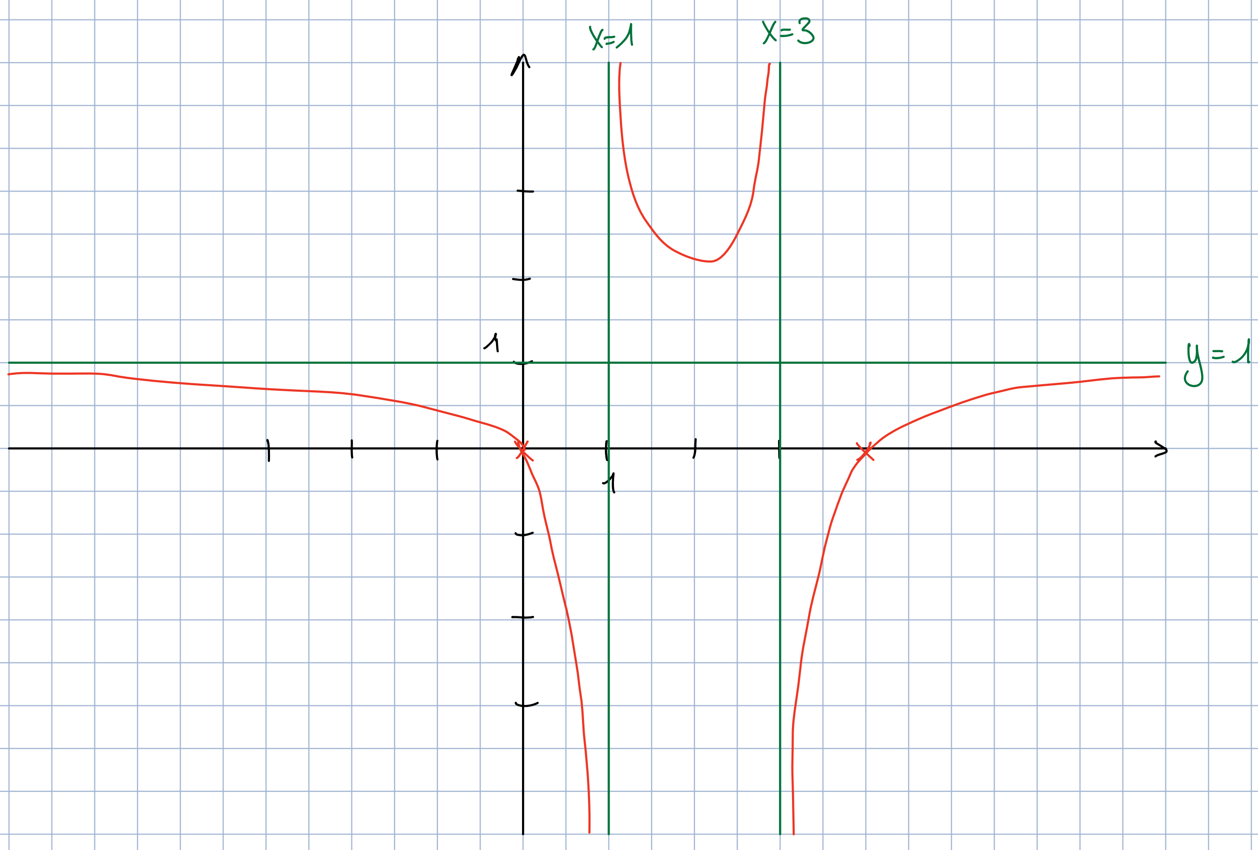
AH : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1 \Rightarrow y=1$ est une AH

$\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3} - \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x+3} = \dfrac{-3}{x^2-4x+3}$ ← pas de zéro ← v.i. : 1 et 3

position relative : de f p.r. à l'AO

x		1		3	
sgn(δ)	−	‖	+	‖	−
pos(f)	dessous	‖	dessus	‖	dessous

4) graphe :



f) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4} = \dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x+2)(x-2)}$ ⊛

⊛ avec Horner : 1 est un zéro : $1-3+2=0$ ✓

$\Rightarrow$

	1	−3	0	2
1		1	−2	−2
	1	−2	−2	‖ 0

zéro : $(x-1)(x^2-2x-2)$

$\downarrow$ 1 $\qquad \downarrow$ $\Delta = 12$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \cong \begin{cases} 2{,}7 \\ -0{,}7 \end{cases}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) signe de f :

x		-2		$-0{,}7$		1		2		$2{,}7$	
sgn(f)	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

3) AV/trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \text{“}\dfrac{-18}{0}\text{”} = \infty \Rightarrow x = -2$ est une AV

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{-2}{0} = \infty \Rightarrow x = 2$ est une AV

AH/AO : AO car $\deg(N) = 3$ et $\deg(D) = 2$

$$\begin{array}{rr|l} x^3 - 3x^2 \qquad +2 & & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^3 \qquad +4x \quad & & x-3 \\ \cline{1-1} -3x^2+4x+2 & & \\ +3x^2 \qquad -12 & & \\ \cline{1-1} 4x-10 & & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x - 3 + \dfrac{4x-10}{x^2-4}$

$\Rightarrow y = x-3$ est une AO et $\delta(x) = \dfrac{4x-10}{x^2-4}$

position relative de f p.r. à l'AO :

x		-2		2		$5/2$	
sgn(δ)	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$
pos(f)	dessous	‖	dessus	‖	dessous	∩	dessus

$\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ car $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

4) graphe :