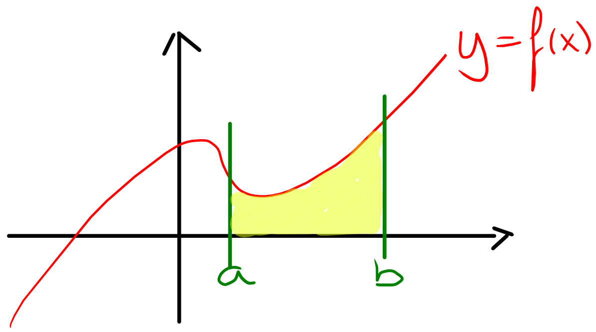
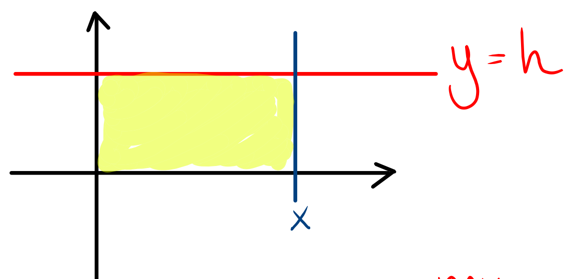
Primitives et intégrales

But : calculer l'aire d'un domaine sous courbe

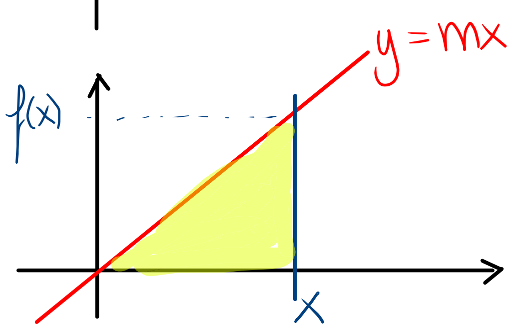


Exple d'intro



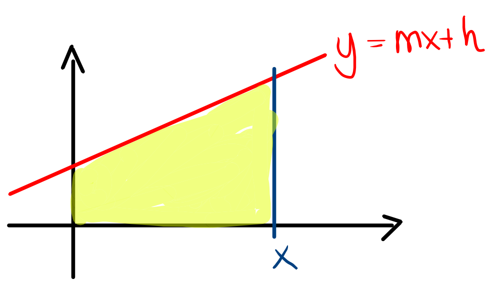
$$f(x) = h \implies \mathcal{A}(x) = hx$$

dérivée



$$f(x) = mx \implies \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} x \cdot mx$$
$$= \frac{1}{2} mx^2$$

dérivée



$$f(x) = mx + h \implies \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}(mx + h + h)x$$
$$= \frac{1}{2} mx^2 + hx$$

dérivée

Primitives

Le problème est le suivant :

Si f est une fonction donnée, trouver une fonction F telle que $\boxed{F(x)' = f(x)}$

Déf : Une telle fonction F est appelé une primitive de f.

chercher une primitive

Exple : si $f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$

dérivée

Pourquoi une ? car $F(x) = x^2+5$ ou $F(x) = x^2-3$ sont aussi des primitives de f

Il existe une infinité de $F(x)$ pour une fonction donnée mais toute de la forme $F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$

On note $\boxed{\int f(x)\cdot dx = F(x) + c \quad , c\in\mathbb{R}}$

notation

On l'appelle l'intégrale indéfinie de f

$f(x) = 2x \Rightarrow \int 2x\cdot dx = x^2+c$

Exples :

- $\int x\cdot dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
- $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
- $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c$
- $\int 3\cdot dx = 3x + c$
-

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)\,dx$	
k	kx	$kx+c$	, $k\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	, $n\in\mathbb{R}-\{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	....	$(n=-1)$
e^x	e^x	....	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	....	
$\cos(x)$	$\sin(x)$		

Calculs de primitive : (découle des règles de dérivation)

1) $(k\cdot f)' = k\cdot f' \Rightarrow \boxed{\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$

exple : $\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx = 2\cdot\frac{1}{4}x^4 + C = \frac{1}{2}x^4 + C$

2) $(f+g)' = f' + g' \Rightarrow \boxed{\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$

exple : $\int (2x^3 + 3x + 5)\,dx = \int 2x^3 dx + \int 3x\,dx + \int 5\,dx$

$= \frac{1}{2}x^4 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 + 5x + C$

Exples :

- $\int \frac{5}{y^4}\,dy = 5\int y^{-4}\,dy = 5\cdot\frac{1}{-3}y^{-3} + C$

$= -\frac{5}{3y^3} + C$

- $\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{1/4}\,dx = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{4}+1}_{5/4}} x^{\overbrace{\frac{1}{4}+1}^{5/4}} + C$

$= \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}$

3) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow$ $\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c}$

3a) $\int u^n \cdot u'\, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$ $\quad n \neq -1$

$\int (g(x))^n \cdot g'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} g(x)^{n+1} + c$

3b) $\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + c$

3c) $\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + c$

3d) $\int \cos(u) \cdot u'\, dx = \sin(u) + c$

3e) $\int \sin(u) \cdot u'\, dx = -\cos(u) + c$

⚠ $\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

Exemples :

- $\int (\underbrace{3x^2 + 5x - 1}_{u})^3 \cdot (\underbrace{6x+5}_{u'})\, dx = \frac{1}{4}(3x^2+5x-1)^4 + c$

  $\int u^3 \cdot u'\, dx = \frac{1}{4} u^4 + c$

- $\int \underbrace{2}_{u'}\cos(\underbrace{2x-3}_{u})\,dx = \sin(2x-3) + C$

  $\int \cos(u)\cdot u'\,dx = \sin(u) + C$

- $\int x(\underbrace{1+x^2}_{u})^3\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2x\,(1+x^2)^3\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{u'}\cdot(\underbrace{1+x^2}_{u})^3\,dx$

  $u = 1+x^2$

  $u' = 2x$

  astuce pour obtenir la dérivée interne

  $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1+x^2)^4 + C$

  $= \frac{1}{8}(1+x^2)^4 + C$

- $\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{u'}x\,(\underbrace{1+x^2}_{u})^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}(1+x^2)^{-2} + C = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + C$

- $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \left(= \int \underbrace{2x}_{u'}\,(\underbrace{1+x^2}_{u})^{-1}\,dx = \right) = \ln(|1+x^2|) + C$

  $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

- $\int (1+x^2)^2\,dx = \int \left(1 + 2x^2 + x^4\right)dx = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C$

  $u = 1+x^2$

  $u' = 2x$