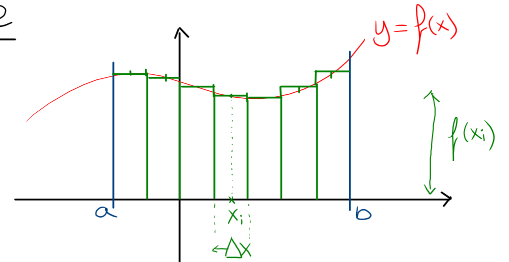
Intégrale



Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et D le domaine fermé délimité par Ox, $y=f(x)$, $x=a$ et $x=b$.

Pour calculer l'aire de D, on découpe le domaine en n rectangles de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Chaque rectangle a comme hauteur $f(x_i)$

$$\text{Aire de } D \cong f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x$$
$$\cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

A la limite quand n tend vers l'infini, cette somme est égale à l'aire de D.

$$\text{Aire de } D = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \underset{\text{notation}}{=} \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(somme de Riemann)}$$

Elle est appelée l'<u>intégrale définie</u> de f entre a et b
a et b sont les <u>bornes</u> de l'intégrale

Pour calculer cette intégrale définie $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

thm. fond. du calcul intégral.

on procède en 2 étapes :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Rem</u> : l'intégrale définie peut être positive, négative ou nul.
Elle correspond à une aire algébrique.

Exples :

- $\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} (x^2+7)^2 \cdot x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x^2+7)^3 \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{6}\left[8^3 - 11^3 \right] = \frac{1}{6} \cdot (-819)$

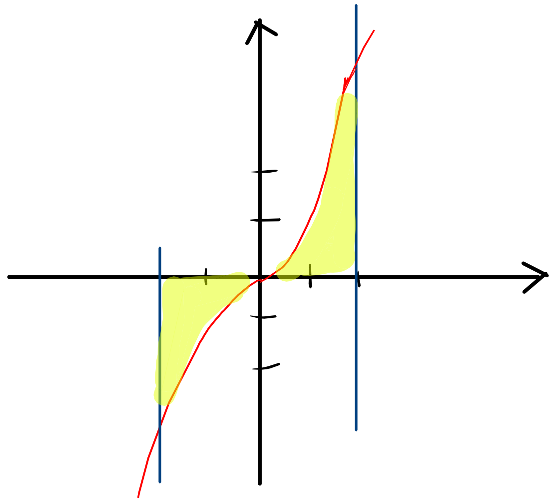
  $u = x^2+7$

  $u' = 2x$

  $= -\frac{819}{6} = -\frac{273}{2}$

- $\int_{-2}^{2} x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4}\left(2^4 - (-2)^4\right) = 0$

ce n'est pas une aire géométrique



Ex 2.2.13

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3 \qquad \int_1^2 f(x)\,dx = 4 \qquad \int_2^3 f(x)\,dx = -8$$

a) $$\int_0^2 f(x)\,dx = 3+4 = 7$$

b) $$\int_0^1 3f(x)\,dx = 3\cdot 3 = 9$$

c) $$\int_0^3 8f(x)\,dx = 8\big(3+4+(-8)\big) = -8$$

d) $$\int_3^1 2f(x)\,dx = -2\cdot(4-8) = 8$$

$$\int_1^3 2f(x)\,dx = 2\cdot(4-8) = -8$$

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx \qquad \frac{u'}{u}$$

$$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad u' \cdot u^n$$

$$\int \frac{3x^3}{(x^2+1)}\,dx \qquad \text{division.}$$

$$\int \cos^3(x)\sin(x)\,dx \qquad u' \cdot u^n$$

$$\int \cos^3(x)\,dx \qquad \text{formule}$$

$$\int_{-2}^{3} \left(x^2 + x + 3\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \Big|_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{27}^{\,9} + \frac{1}{2} \cdot 9 + 9\right) - \left(\frac{1}{3}(-8) + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{\,2} - 6\right) = \frac{175}{6}$$

$$\underbrace{\left(9 + 9 \boxed{a^{b/c}} 2 + 9\right)}_{22 \lrcorner 1 \lrcorner 2} - \underbrace{\left(-8 \boxed{a^{b/c}} 3 + 2 - 6\right)}_{-\frac{20}{3}}$$

$$22 \lrcorner 1 \lrcorner 2 \xrightarrow{\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{a^{b/c}}} 45 \lrcorner 2$$

$$\frac{45}{2}$$

2.2.12

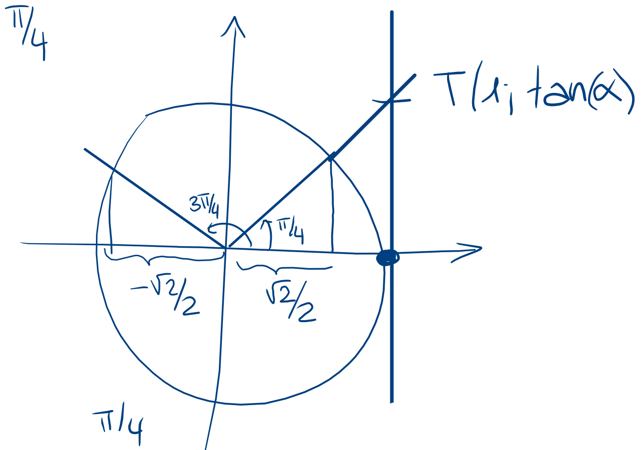
c) $$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x+1}\,dx = \frac{3}{4}(x+1)^{4/3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{0}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\underbrace{16}_{8\cdot 2}} = \frac{3\cdot 2}{4}\sqrt[3]{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

d) $$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$



e) $$\int_{0}^{\pi/4} \left(1+\tan^2(x)\right)dx = \tan(x)\Big|_{0}^{\pi/4} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1-0 = 1$$

f) $$\frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2(1+2x)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1+2x)^4\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{8}\left(5^4-1^4\right) = \frac{624}{8} = 78$$

$u = 1+2x$

$u' = 2$