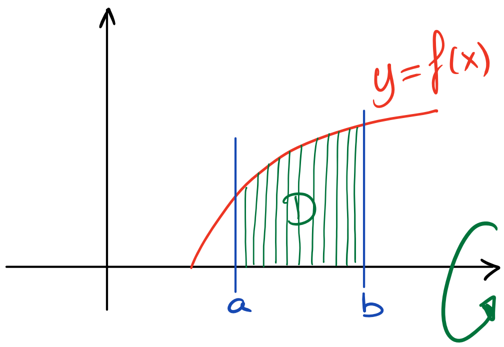
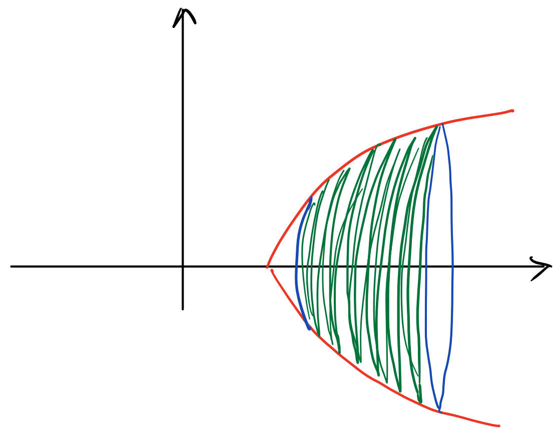
Calcul de volume

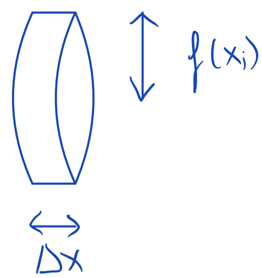




On fait tourner le domaine fermé limité par $y=f(x)$, l'axe Ox, $x=a$ et $x=b$ autour de l'axe Ox.

L'idée est la même que pour le calcul d'aire, on découpe le domaine en n rectangles de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$.

En faisant tourner un rectangle, on obtient un cylindre de volume $V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$



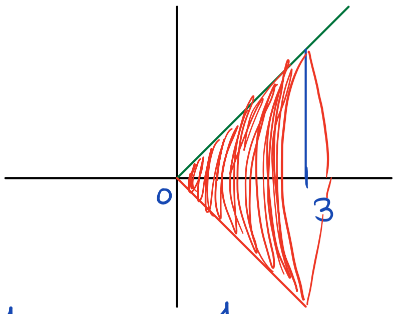
En additionnant ces volumes lorsque $n \to +\infty$ on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$$

Exemples:

1) $f(x) = x$ sur $[0;3]$



$$V = \pi \int_0^3 x^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi \, x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 27 - \frac{1}{3}\pi \cdot 0 = 9\pi \; u^3$$

2) 2.2.34 c)

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad a = 1 \qquad b = 2 \qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 (x+1)^{-2} \, dx$$

$u = x+1$
$u' = 1$

$$= \pi \cdot \frac{1}{-1} (x+1)^{-1} \Big|_1^2 = -\frac{\pi}{x+1} \Big|_1^2$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} u^3$$

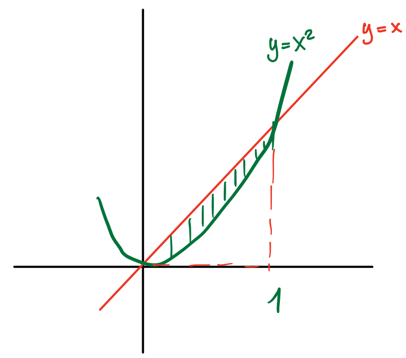
ex 2.2.34 a) b)

2.2.32

3) Calculer le volume du solide engendré par la rotation du domaine fermé limité par les courbes

$$y = x \quad \text{et} \quad y = x^2$$

autour de Ox.



points d'$\cap$: $\quad x = x^2$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2 \, dx = \pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} \, u^3$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 \, dx = \pi \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \, u^3$$

$$\boxed{V = V_1 - V_2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15} \, u^3$$

ou

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx \; \ldots\ldots = \frac{2\pi}{15} \, u^3$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^1 \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) dx}$$

ex 2.2.36

puis ex 2.2.26 / 31 / 41