Ex 2.8.2

a) $f(x) = x^3 - 3x$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$

$-1 \qquad 1$ zéros de f'

x		-1		1	
$sgn(f')$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = -1+3 = 2 \quad \Rightarrow$ Max$(-1;2)$

$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = 1-3 = -2 \quad \Rightarrow$ min$(1;-2)$

avec étude complète :

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

2) zéro et signe : zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

$0 \qquad -\sqrt{3} \qquad +\sqrt{3}$ $\cong 1{,}7$

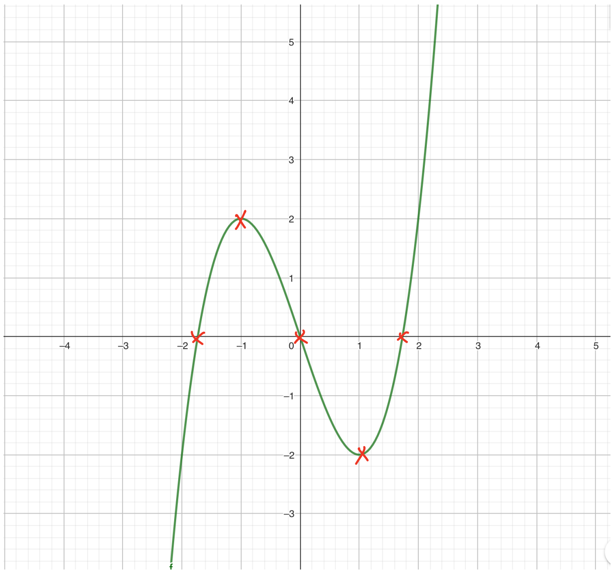
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

3) asymptotes : AV/trou : / vu $ED(f)$

AH/AO : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ pas d'AH, ni d'AO

4) croissance : voir plus haut

graphe :



b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2-1) = -4x(x+1)(x-1)$

$\downarrow\ 0 \quad \downarrow\ -1 \quad \downarrow\ 1$ $\quad$ zéros de f'

x		-1		0		1	
sgn(f')	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Max_1	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max_2	$\searrow$

$f(-1) = 13 \Rightarrow Max_1\ (-1; 13)$

$f(0) = 12 \Rightarrow \min\ (0; 12)$

$f(1) = 13 \Rightarrow Max_2\ (1; 13)$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(x+2)^2(x-3)^2 + (x+2)^3 \cdot 2(x-3)$

$= 3(x+2)^2(x-3)^2 + 2(x+2)^3(x-3)$

$= (x+2)^2(x-3)\left[\underbrace{3(x-3) + 2(x+2)}_{3x-9+2x+4}\right]$

$= (x+2)^2(x-3)(\underbrace{5x-5}_{5(x-1)}) = 5(x+2)^2(x-3)(x-1)$

$\downarrow\ -2\ (2) \quad \downarrow\ 3 \quad \downarrow\ 1$ $\quad$ zéros de f'

$u = (x+2)^3$
$u' = 3(x+2)^2 \cdot 1$
$= 3(x+2)^2$

$v = (x-3)^2$
$v' = 2(x-3) \cdot 1$
$= 2(x-3)$

x		-2		1		3	
sgn(f')	$+$	0 (2)	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	palier	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(1000): +$

palier : $f(-2) = (-2+2)^3(-2-3)^2 = 0 \cdot (-5)^2 = 0 \Rightarrow$ palier $(-2; 0)$

Max : $f(1) = (1+2)^3(1-3)^2 = 3^3 \cdot (-2)^2 = 27 \cdot 4 = 108 \Rightarrow$ Max $(1; 108)$

min : $f(3) = (3+2)^3(3-3)^2 = 5^3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ min $(3; 0)$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x-3)\cdot 1}{(x+5)^2} = \dfrac{2x+10-2x+3}{(x+5)^2} = \dfrac{13}{(x+5)^2}$ $\qquad$ pas de zéro

v.i. : -5 (2)

x		-5	
f'	$+$	$\|\|$	$+$
f	$\nearrow$	$\|\|$ (2)	$\nearrow$

pas d'extremum

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+2) - (x-1)^2\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)[2(x+2) - (x-1)]}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$

x		-5		-2		1	
f'	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\|\|$ (2)	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-5) = \dfrac{36}{-3} = -12 \Rightarrow$ Max $(-5;-12)$

$f(1) = 0 \Rightarrow$ min $(1;0)$

avec étude complète :

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) zéro et signe : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (2)

x		-2		1	
$\text{sgn}(f)$	$-$	$\|\|$	$+$	0 (2)	$+$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = "\frac{9}{0}" = \infty \Rightarrow$ $x = -2$ est une AV

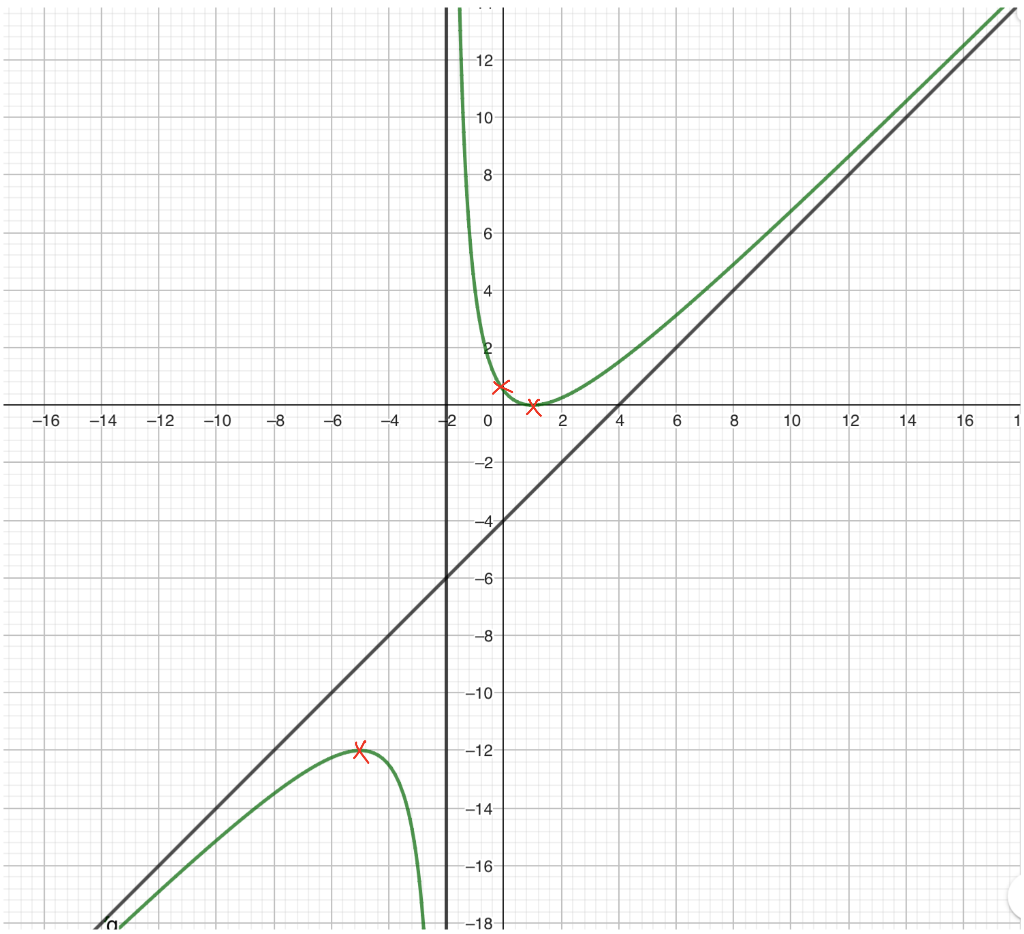
AH/AO : comme $\dim(N) = \dim(D) + 1$ $(2 = 1+1)$ on a une AO :

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 2x + 1 & x+2 \\ \cline{2-2}
-x^2 \mp 2x & x-4 \\ \cline{1-1}
-4x + 1 & \\
+4x + 8 & \\ \cline{1-1}
9 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+2} \Rightarrow$ AO: $y = x - 4$

4) croissance : voir plus haut

5) graphe : OàO: $f(0) = \frac{1}{2}$



f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ zéros : ± 1

x		-1	$+$	1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$f(-1) = -\dfrac{1}{2} \implies \underline{\min\left(-1\,;\,-\tfrac{1}{2}\right)}$

$f(1) = \dfrac{1}{2} \implies \underline{\mathrm{Max}\left(1\,;\,\tfrac{1}{2}\right)}$