

Endomorphisme

1. Matrice de passage

Exemple : Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$B^* = (a, b, c)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \text{avec } a &= 2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \\ b &= -e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \\ c &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B \end{aligned}$$

Quelles sont les composantes du vecteur $v = (11, 5, -1) = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}_B$ dans la base B^* ?

On cherche α, β, γ tels que $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + 3\gamma = 11 \\ \alpha + 2\gamma = 5 \\ \beta + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Définition : On appelle P la matrice de passage de la base B à la base B^* ou matrice de changement de base. Les colonnes de P sont les composantes de B^* .

Ainsi $P \cdot V^* = V \Leftrightarrow V^* = P^{-1} \cdot V$

On va donc calculer P^{-1} (inversible car $\text{Det}(P) = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2-3) = 1 \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 - 2L_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_3 \\ \\ L_2 - 2L_3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $V^* = P^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = (5; -1; 0)$ dans B^*

Exple (suite): Soit $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorphisme tel que $h((x; y; z)) = (4x - z; y + z; x - 2y + 3z)$ dans la base canonique B .

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ dans B .

Quelle est la matrice H^* de h dans B^* ?

On peut schématiser la situation : $h: \begin{array}{ccc} B & & B \\ V & \xrightarrow{H} & W \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ V^* & \xrightarrow{H^*} & W^* \\ B^* & & B^* \end{array} \begin{array}{l} = H \cdot V \\ \\ = H^* \cdot V^* \end{array}$
(avec V un vecteur et W son image dans la base B et $V^* \dots W^* \dots B^*$)

Thm:

$$H^* = P^{-1} \cdot H \cdot P \quad \text{et} \quad H = P \cdot H^* \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow H^* = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -10 \\ -12 & 12 & -9 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

ex 1.4.10 / 11 / 13 (12 en rév.)

2. Valeurs propres, vecteurs propres

Déf: 1) Soit $h: V \rightarrow V$ un endomorphisme

On appelle vecteur propre de h tout vecteur $v \in V$ non nul

tel que $h(v) = \lambda v$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

2) le nombre λ est appelé la valeur propre de h associée à v .

3) L'ensemble $E_\lambda = \{v \in V \mid h(v) = \lambda v\}$ est un

SEV de V , appelé sous-espace propre associé à λ et noté E_λ

(c'est l'ensemble des vect. propres de h associés à λ et du vect. nul)

Exemple Soit f un endo. de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x+y; 5y)$

• $v = (1, 3)$ est-il un vecteur propre de f ?

$$f(1, 3) = (5, 15) \Rightarrow \text{oui car } f(v) = 5 \cdot v \text{ et } \lambda = 5$$

• $u = (2, -1)$ est-il un vecteur propre de f ?

$$f(2, -1) = (3, -5) \Rightarrow \text{non}$$

• $\lambda = 2$ est-elle une valeur propre de f ?

Si oui, on doit trouver $v = (x, y)$ tq $f(x, y) = 2(x, y)$

$$\Leftrightarrow (2x+y; 5y) = (2x; 2y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 2x \\ 5y = 2y \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui 2 est une valeur propre de f pour tous les vecteurs de la forme $v = (k; 0)$.

$$\Rightarrow E_2 = \{k(1, 0) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle$$

. $\lambda = -1$ est-elle une valeur propre de f ?

Si oui, on doit trouver $v = (x, y)$ tq $f(v) = -v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -x \\ 5y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{non car } v \neq 0$$

ex 1.5.1 à 1.5.9 a) b) f)

Recherche des valeurs propres et vecteurs propres

Soit $h : V \rightarrow V$ un endomorphisme avec V de dimension n , et H la matrice de h relativement à une base $\mathcal{B}$.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in V$, non nul, tels que $h(v) = \lambda \cdot v$

$$\Leftrightarrow H \cdot v = \lambda \cdot I \cdot v \quad \text{matrice}$$
$$\Leftrightarrow Hv - \lambda Iv = 0$$
$$\Leftrightarrow (H - \lambda I)v = 0$$

Cette équation a comme solution triviale $v = 0$ et si $\text{Det}(H - \lambda I) = 0$ l'équation possède alors d'autres solutions qui sont les valeurs propres.

Rappel : $A \cdot x = 0$ a comme unique solution $x = 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Définitions :

- 1) $\text{Det}(H - \lambda I)$ est appelé le polynôme caractéristique de h , noté $p(\lambda)$.
- 2) $\text{Det}(H - \lambda I) = 0$ est appelée équation caractéristique de h .

Ainsi les valeurs propres de h sont les solutions de l'équation caractéristique de h .

Et on a $E_\lambda = \text{Ker}(h - \lambda \cdot \text{id})$ où $\text{id} : V \rightarrow V$
 $u \mapsto u$

Exemple 1 : Soit h un endomorphisme donné par $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

* Cherchons les val. propres de h :

$$p(\lambda) = \text{Det}(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 0 = (2-\lambda)(5-\lambda)$$

$\Rightarrow p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 5$

* Déterminons les sous-espaces propres associés :

$\lambda_1 = 2$ on doit déterminer $\text{Ker}(h - 2\text{id}_V)$ en résolvant $(H - 2I) \cdot v = 0$

$$H - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{E_2 = \langle (1, 0) \rangle}$$

$$\underline{\lambda_2 = 5} : H - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 3k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{E_5 = \langle (1, 3) \rangle}$$

Exemple 2 Soit $h(x, y, z) = (3x - 4z, 2x - y - 2z, 2x - 3z)$

La matrice de cette application linéaire est $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique

* Cherchons les val. propres de h :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-\lambda) ((3-\lambda)(-3-\lambda) + 8) \\ &= -(1+\lambda)(-9 + \lambda^2 + 8) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = 1$

* Cherchons les sous-espaces propres associés :

$$\underline{\lambda = -1} : H + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = l \\ z = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{-1} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle}$$

$$\underline{\lambda = 1} : H - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \underline{E_1 = \langle (2, 1, 1) \rangle}$$

ex 1.5.10 a) c) d) e) + 1.5.11
(1^{re} partie)

Propriétés du polynôme caractéristique

Soit h un endomorphisme de V de dim n .

1) h admet 0 comme valeur propre $\Leftrightarrow h$ n'est pas bijectif

Dans ce cas $E_0 = \text{Ker}(h)$ (qui doit être $\neq \{0_V\}$) (sinon $\text{Ker}(h) = \{0_V\}$)
 $\uparrow$
pas un vecteur propre

2) h admet au plus n valeurs propres

3) Si h admet k ($k \leq n$) valeurs propres distinctes,
alors il existe au moins k vecteurs propres lin. indépendants.

4) Si h admet n valeurs propres distinctes,
alors les vecteurs propres associés à ces valeurs propres forment une
base de V .

Diagonalisation

Soit h un endomorphisme de V de dimension n .

Définition : On dit que h est diagonalisable s'il existe une base B^* de V
telle que la matrice H^* de h relativement à B^* est diagonale.

Théorèmes : 1) h est diagonalisable si et seulement si il existe une
base B^* formée de vecteurs propres de h .

2) Si h possède n valeurs propres distinctes, alors
 h est diagonalisable.

Dans ce cas la matrice diagonale est $H^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
associée à $B^* = (u_1, \dots, u_n)$.
 $\uparrow$
vect. propres

3) Si h admet k ($k \leq n$) valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les espaces propres associés, alors h est diagonalisable si et seulement si et seulement si

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_k}) = n$$

Exemple 2 (suite)

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On a trouvé $p(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) \Rightarrow \lambda_1 = -1$
 $\lambda = 1$

et $B_{E_{-1}} = ((1; 0; 1), (0; 1; 0))$ et $B_{E_1} = (2; 1; 1)$

Comme $(\text{mult}(-1) = 2 = \dim(E_{-1}))$

et $(\text{mult}(1) = 1 = \dim(E_1))$

et en additionnant on obtient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ alors h est diagonalisable :

$H^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $B^* = ((1; 0; 1), (0; 1; 0), (2; 1; 1))$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Rappel : $H^* = P^{-1} H P$
 $H = P H^* P^{-1}$)

$p(\lambda) = (\lambda-3)^2$

Exemple 3 1.5.10 c) $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\lambda = 3$ et $E_3 = \langle (1; -1) \rangle$
(mult. 2)

$\dim(E_3) = 1 < \dim(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow$ non diagonalisable.

ex 1.5.10 a) d) e) à finir

ex 1.5.13 et 1.5.14 + prob d'examen.