Problèmes d'optimisation

Nous considérons ici des problèmes de recherche qui consistent à déterminer la situation optimale d'une grandeur observée en fonction d'un certain nombre de contraintes liées au contexte du problème.
Pour ce faire, nous devons surmonter quelques difficultés dont la principale est la traduction du langage écrit en langage mathématique.
Une autre difficulté vient du fait que nous avons souvent plusieurs variables à étudier alors que nous ne savons travailler qu'avec des fonctions à une seule variable. Par conséquent, gardons à l'esprit qu'il faut toujours exprimer les différentes variables en fonction de la variable à optimiser.

Voici une **marche à suivre** pour résoudre ce genre de problème :

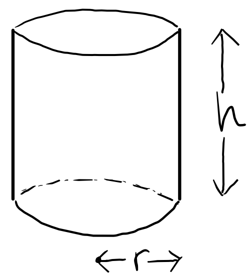
- Bien lire le problème (du début à la fin, plusieurs fois), traduire les données en termes mathématiques et si possible faire un **croquis**.
- Identifier **la fonction** ou **la variable à optimiser** ainsi que toutes **les variables** du problème.
- Donner les **conditions d'existence** des variables. Ensemble de validité
- Trouver le lien entre les variables (**contraintes**) et les exprimer en fonction de la variable à optimiser. si plusieurs variables
- Déterminer la fonction à une variable qui permettra de réaliser l'optimisation.
- trouver le MINIMUM ou le MAXIMUM de la fonction à optimiser, à l'aide de l'étude de la croissance.
- Répondre à la question posée et vérifier la cohérence du résultat.

Exemple :
On désire fabriquer des boîtes de conserve de petits pois d'un volume égal à 785 cm^3.
Déterminer les dimensions de cette boîte afin d'utiliser le minimum de fer blanc.

Exemple : Boîte de conserve de volume égal à $785\ cm^3$

Déterminer les dimensions de cette boîte afin d'utiliser le moins de fer blanc.

croquis :



$r, h > 0$

fct à optimiser : Aire totale de la boîte : $f(r;h) = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r\cdot h$ (1)

contrainte : volume $= 785 \iff \pi r^2 h = 785 \iff h = \dfrac{785}{\pi r^2}$ (2)

(1) et (2)

$$\Rightarrow f(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cdot\frac{785}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} = 2\pi r^2 + \frac{1570}{r}$$

$$\Rightarrow f'(r) = 4\pi r - \frac{1570}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 1570}{r^2}$$

zéro de f' : $4\pi r^3 - 1570 = 0 \iff 4\pi r^3 = 1570 \iff r = \sqrt[3]{\dfrac{1570}{4\pi}} \cong 5$

r	0		~ 5	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Rightarrow h = \frac{785}{\pi r^2} \cong \frac{785}{\pi\cdot 5^2} = 10$$

Pour une utilisation minimale de matière première, la boîte doit avoir un rayon de 5cm et une hauteur de 10 cm