Ex 1.4.10

a)

$$\left.\begin{aligned} h(e_1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B^*} \\ h(e_2) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B^*} \\ h(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B^*} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_1 \to L_3}{\overset{L_2 - L_1 \to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 - L_2 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} H^* = P^{-1} H P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ex 1.4.11

a) $\mathcal{B}^* = ((0;1;1);(1;0;1);(1;1;0))$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1(0-1) + 1(1-0) = 1+1 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

b) Déterminons la matrice inverse de la matrice de passage (ou de chgmt de base), qui est inversible car $\mathrm{Det}(P) = 2 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_1 \to L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_2 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}L_3 \to L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{L_1 - L_3 \to L_1}{L_2 - L_3 \to L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F^\star = P^{-1}FP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 1.4.12

$$f : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \longmapsto (a_1 ; 2a_2 ; 3a_3 ; 0) \text{ dans } \mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3)$$

car $(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

a) f est une applic. lin. car $\forall\, u = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{P}_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$*$ $f(u+v) = (a_1+b_1 ; 2(a_2+b_2) ; 3(a_3+b_3) ; 0)$ $\;\;\overset{\checkmark}{=}$

$f(u) + f(v) = (a_1 ; 2a_2 ; 3a_3 ; 0) + (b_1 ; 2b_2 ; 3b_3 ; 0)$

$*$ $\lambda f(u) = \lambda(a_1 ; 2a_2 ; 3a_3 ; 0) \overset{\checkmark}{=} (\lambda a_1 ; 2\lambda a_2 ; 3\lambda a_3 ; 0) = f(\lambda u)$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $*$
$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha = k \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{(k;0;0;0) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1;0;0;0) \rangle = \mathbb{P}_0$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$

$*$
$$A \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \text{libres} \end{array} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \langle (1;0;0;0) ; (0;2;0;0) ; (0;0;3;0) \rangle$$

$$= \langle (1;0;0;0) ; (0;1;0;0) ; (0;0;1;0) \rangle$$

$$= \mathbb{P}_2$$

et $\operatorname{rang}(f) = 3 \quad (= \dim(\operatorname{Im}(f)))$

d) B' est constitué de 4 vecteurs dans P_3 de dim 4, il suffit alors de vérifier qu'ils sont libres:

$$B' = (1+x \, ; -2x+x^2 \, ; -x+x^2 \, ; \, 2x-3x^2+x^3) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2+1) = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ les 4 vecteurs sont libres, ils forment une base

e) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

calculons P^{-1} : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{l_2 \leftrightarrow l_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\sim}{L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 + 3L_4 \\ \sim \\ L_3 + 4L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_2 - L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 1.4.13

a) C'est un automorphisme si h_k est bijective $\Leftrightarrow$ $Ker(h) = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow$ $\det(H_k) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 & k-3 \\ 5 & k-1 & 3 \\ 7 & k+3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\overset{\text{Sarrus}}{\downarrow}}{=} (k-1)^2 + 42 + 5(k+3)(k-3) - 7(k-1)(k-3) - 3(k+3)(k-1) - 10$$

$$= k^2 \underline{-2k} + \underline{1} + \underline{42} + 5k^2 \underline{-45} - 7k^2 \underline{+28k} \underline{-21} - 3k \underline{-6k} \underline{+9} \underline{-10}$$

$$= -4k^2 + 20k - 24 = -4(k^2 - 5k + 6) = -4(k-2)(k-3)$$

$\Rightarrow$ automorphisme si $k \neq 2$ et $k \neq 3$

b) $H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

b₁) $$H_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{l_3 - 7l_1 \to l_3}{\overset{l_2 - 5l_1 \to l_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{l_1 - l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = +k \\ y = -k \\ z = -k \end{cases} \Rightarrow Ker(h_3) = \langle (1; -1; -1) \rangle \quad \#$$

b₂) $Dim(Im(h_3)) = 2$ par le thm du rang

$\Rightarrow$ $Im(h_3) = \langle (2;2;6) ; (0;3;1) \rangle = \langle (1;1;3) ; (0;3;1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ✓ \quad \Rightarrow \quad Im(h_3) = \langle (1;-8;0) ; (0;3;1) \rangle$$

b₃) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(P) = -8 + 1 - 3 = -10 \neq 0$ $\Rightarrow$ libres

$\Rightarrow$ base

$\Rightarrow$ inversible

... $P^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow H_3^* = P^{-1} H_3 \cdot P = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$