2) Optimisation

2.8.5 La concentration $C(t)$, en milligrammes par litre, d'un certain médicament dans le sang d'un patient est donnée par

$$C(t) = \frac{0,16t}{t^2+4t+4}$$

où t désigne le nombre d'heures suivant la prise du médicament. Après combien de temps la concentration est-elle maximale ?

$ED(C) = \mathbb{R} - \{-2\}$

car $t^2+4t+4 = (t+2)^2$

$EV(C) = \mathbb{R}_+$ ensemble de validité

$$C'(t) = \frac{0,16(t^2+4t+4) - 0,16t(2t+4)}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{0,16\left[t^2+4t+4 - t(2t+4)\right]}{(t+2)^4}$$

$u = 0,16t \qquad v = t^2+4t+4$

$u' = 0,16 \qquad v' = 2t+4$

$$= \frac{0,16(-t^2+4)}{(t+2)^4}$$

$$= \frac{-0,16(t+2)(t-2)}{(t+2)^4}$$

$$= \frac{-0,16(t-2)}{(t+2)^3}$$

zéro : 2

v.i. : -2 (3)

t	0		2	
sgn (C')		+	0	—
C		$\nearrow$	Max	$\searrow$

← $C'(1000)$: $\frac{-}{+}$

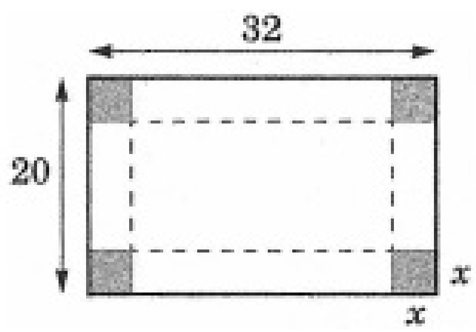
La concentration est maximale après 2 heures

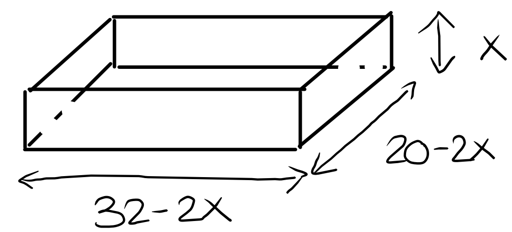
(pas demandé ici : $C(2) = \frac{0,16 \cdot 2}{(2+2)^2} = \frac{0,32}{16} = 0,02$ mg/L

concentration maximale)

2.8.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?

Croquis :





Fonction à optimiser : volume $\Rightarrow$ $V(x) = (32-2x)(20-2x)x$

Variable : x avec $EV(V) = [0\,;10]$

$$V(x) = (640 - 64x - 40x + 4x^2)x = 4x^3 - 104x^2 + 640x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 208x + 640 \qquad \Delta = 12544 = 112^2$$

$$x_{1,2} = \frac{208 \pm 112}{24} = \begin{cases} 40/3 = 13,\overline{3} \\ 4 \end{cases}$$

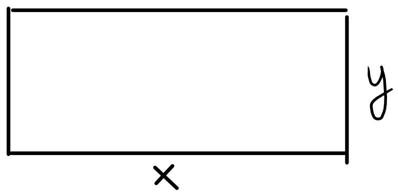
x	0		4		10	$13,\overline{3}$
V'		$+$	0	$-$		
V		$\nearrow$	Max	$\searrow$		

$V'(8) < 0$

le carré enlevé doit mesurer 4 cm de côté pour un volume maximal.

2.8.12 Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

croquis :



fonction à optimiser : surface $= x \cdot y$

fct à 2 variables ! on ne sait pas la dériver

$0 \leq x, y \leq 2$

contrainte : périmètre $= 4$

$$2x + 2y = 4$$
$$x + y = 2$$
$$y = 2 - x \quad \Longrightarrow \quad S(x) = x(2-x)$$

fonction à 1 variable / on sait dériver

$EV(S) = [0\,;2]$

$\Rightarrow \; S(x) = 2x - x^2$

$\Rightarrow \; S'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$

zéro : 1

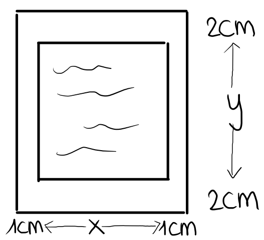
x	0		1		2
S'		+	0	−	
S		↗	Max	↘	

$\Rightarrow \; x = 1 \;\Rightarrow\; y = 2 - 1 = 1$

C'est le carré de côté égal à 1

2.8.13 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm² de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

Croquis :



fonction à optimiser : surface de papier : $(x+2)(y+4)$

contrainte : surface de texte imprimé : $xy = 392$

$$y = \frac{392}{x}$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = (x+2)\left(\frac{392}{x}+4\right) \qquad EV(S) = \mathbb{R}_+^*$$

$$= 392 + \frac{784}{x} + 4x + 8$$

$$= \frac{784}{x} + 4x + 400$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ &\left(\frac{784}{x}\right)' = \left(784 \cdot \frac{1}{x}\right)' \\ &\qquad = 784 \left(\frac{1}{x}\right)' \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad S'(x) = -\frac{784}{x^2} + 4$$

$$= \frac{-784 + 4x^2}{x^2} = \frac{4x^2 - 784}{x^2} = \frac{4(x^2 - 196)}{x^2}$$

$$= \frac{4(x+14)(x-14)}{x^2}$$

← zéros : ± 14

← v.i. : 0 (2)

x	0		14	
S'	‖	$-$	0	$+$
S	‖	↘	min	↗

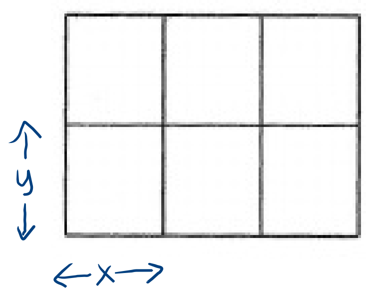
(2)

$$\Rightarrow \quad x = 14 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{392}{14} = 28$$

Les dimensions de la feuille doivent être de 16 cm sur 32 cm

$14+2$ $\qquad$ $28+4$

2.8.16 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



fonction à optimiser : $\text{surface} = xy \quad \left(\text{ou} \quad \text{surface} = 6xy = S(x;y)\right)$

on substitue

contrainte : $\text{clôture} = 288$

$$9x + 8y = 288$$
$$8y = 288 - 9x$$
$$y = \frac{288 - 9x}{8} = 36 - \frac{9x}{8}$$

$\Rightarrow \quad S(x) = x \cdot \left(36 - \frac{9x}{8}\right) = 36x - \frac{9x^2}{8} \qquad x \geq 0 \qquad EV(S) = \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \quad S'(x) = 36 - \frac{9}{8} \cdot 2x = 36 - \frac{9x}{4}$

zéro de S' : $\quad 36 - \frac{9x}{4} = 0 \Leftrightarrow 36 = \frac{9x}{4} \Leftrightarrow 144 = 9x$

$\Leftrightarrow \quad x = 16$

x	0		16	
S'		$+$	0	$-$
S		$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\left(x = 16 \Rightarrow S(16) = 36 \cdot 16 - \frac{9 \cdot 16^2}{8} = 288 \right.$

$\left. \text{Max}\,(16;\, 288) \right)$

surface d'un enclos

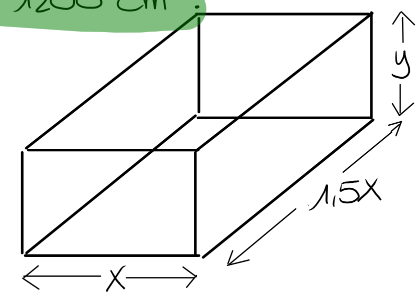
$\Rightarrow \quad y = 36 - \frac{9 \cdot 16}{8} = 36 - 9 \cdot 2 = 18$

Un enclos doit mesurer 16m sur 18m pour avoir une surface maximale.

Ex suppl.

On désire fabriquer une boîte de forme parallélépipède rectangle utilisant le moins de matière première, dont le fond est un rectangle dont un côté vaut 1,5 fois l'autre côté. Le volume vaut $1200\ cm^3$.
Quelles sont les dimensions de cette boîte ?

croquis :



$x, y > 0$

fonction à optimiser : Aire totale des faces : $2xy + 2\cdot 1{,}5xy + 2\cdot 1{,}5x^2 = 3x^2 + 5xy = f(x;y)$ (1)

contrainte : volume $= 1200 \iff 1{,}5x^2y = 1200$

$$y = \frac{1200}{1{,}5x^2} = \frac{800}{x^2} \qquad (2)$$

(1) et (2)

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 5\cancel{x}\left(\frac{800}{x^{\cancel{2}}}\right) = 3x^2 + \frac{4000}{x}$$

Pour trouver le minimum de f on dérive :

$$f'(x) = 6x - \frac{4000}{x^2} = \frac{6x^3 - 4000}{x^2}$$

zéro de f' : $6x^3 - 4000 = 0 \iff 6x^3 = 4000 \iff x^3 = \frac{4000}{6} \iff x = \sqrt[3]{\frac{4000}{6}} \cong 8{,}74$

x	0		$\sim 8{,}74$	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow 1{,}5x \cong 1{,}5 \cdot 8{,}74 = 13{,}1$ et $y = \frac{800}{x^2} \cong \frac{800}{8{,}74^2} \cong 10{,}48$

Pour utiliser le moins de matière possible, la boîte doit mesurer $\sim 8{,}74\ cm \times 13{,}1\ cm \times 10{,}48\ cm$.