1.5.1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y = 2x \\ 3x+8y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ 3x+6y = 0 \end{cases} \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui

1.5.2

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+3y = -2x \\ 3x-y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+3y = 0 \\ 3x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -3k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui

1.5.3

$$h((1;3)) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{non.}$$

1.5.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{2}+1 \\ -1+\sqrt{2}+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1+2\sqrt{2} = \lambda(-1+\sqrt{2}) \\ 3+\sqrt{2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow -1+2\sqrt{2} \stackrel{?}{=} (3+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})$$

$$= -3+3\sqrt{2}-\sqrt{2}+2 = -1+2\sqrt{2} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ oui et $\lambda = 3+\sqrt{2}$

1.5.5

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{oui et } \lambda = 0$$

1.5.6

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{oui et } \lambda = -2$$

1.5.7

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \qquad - z = 4x \\ 2x + 3y + z = 4y \\ -3x + 4y + 5z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \quad - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 & \mid 4 \\ -3x + 4y + z = 0 & \mid 1 \end{cases}$$

on peut résoudre :
(ou échelonner)

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ 5x \ + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui et $(-1;-1;1)$ est un vecteur propre

1.5.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3x \\ 3x - 2y + z = 3y \\ \qquad y + z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = 0 \\ \qquad y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 & \mid 3 \\ 3x - 5y + z = 0 & \mid -1 \\ \qquad y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ \quad 2y - 4z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$$ $\Rightarrow$ oui et $(3;2;1)$ est un vect. propre.

1.5.9

a) $\lambda_1 = 1$: $$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x \\ 2x + y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_{E_1} = \big((0;1)\big)$$

$\lambda_2 = 5$: $$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - 4y = 0 & \mid \div 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_{E_5} = \big((2;1)\big)$$

b) $$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 9y = 4x \\ 4x - 2y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 0 & \mid \div 3 \\ 4x - 6y = 0 & \mid \div 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_{E_4} = \big((3;2)\big)$$

f) $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = x \\ -2x + y = y \\ -2x + z = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -2x = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B_{E_1} = ((0;1;0))$$

$\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = 2x \\ -2x + y = 2y \\ -2x + z = 2z \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2x + z = 0 & 1 \\ -2x - y = 0 & \\ -2x - z = 0 & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -2x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = 2k \\ z = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_{E_2} = ((-1;2;2))$$

$\lambda_3 = 3$: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = 3x \\ -2x + y = 3y \\ -2x + z = 3z \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l|l} x + z = 0 & 2 \\ -2x - 2y = 0 & \\ -2x - 2z = 0 & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_{E_3} = ((-1;1;1))$$

Ex 1.5.10

a) $H = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x;y) \mapsto (3x+2y \,;\, 1+2y)$

* valeurs propres : $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$
$= (\lambda-1)(\lambda-4) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 4$

* espaces propres :

$\lambda = 1$: $H - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(on cherche $\mathrm{Ker}(h - 1 \cdot id)$)

$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \langle (1;-1) \rangle$

$\lambda = 4$: $H - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_4 = \langle (2;1) \rangle$

2 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}^2$, donc h est diagonalisable

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $H^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}^* = ((1;-1) \,;\, (2;1))$

d) $H = \begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x;y;z) \longmapsto (3x+42y-64z \,;\, 3y+84z \,;\, 2z)$

* valeurs propres :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 42 & -64 \\ 0 & 3-\lambda & 84 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \iff \underset{(2)}{\lambda = 3} \text{ ou } \lambda = 2$$

* espaces propres :

$\underline{\lambda = 2}$: $H - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 42 & -64 \\ 0 & 1 & 84 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1 - 42L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3592 \\ 0 & 1 & 84 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3592z = 0 \\ y + 84z = 0 \end{cases}$ 2équ. 3inc. $\Rightarrow$ 1 paramètre $\Rightarrow \begin{cases} x = 3592k \\ y = -84k \\ z = k \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{E_2 = \langle (3592 \,;\, -84 \,;\, 1) \rangle}$

$\underline{\lambda = 3}$: $H - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 42 & -64 \\ 0 & 0 & 84 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 42y - 64z = 0 \\ 84z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 42y - 64z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 2équ. 3inc. $\Rightarrow$ 1 paramètre $\Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{E_3 = \langle (1;0;0) \rangle}$

Comme $\dim(E_3) = 1 \neq \text{mult.}(3) = 2$

alors $\dim(E_3) + \dim(E_2) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc l'application <u>n'est pas diagonalisable</u>.

e) $H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\qquad (x;y;z) \longmapsto (3x+2y+z\,;\ x+4y+z\,;\ x+2y+3z)$

* valeurs propres: $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda)-2\right] - \big(\overbrace{2(3-\lambda)-2}^{4-2\lambda}\big) + \big(\overbrace{2-(4-\lambda)}^{-2+\lambda}\big)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) + 3\lambda - 6$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5) + 3(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)\left[(3-\lambda)(\lambda-5)+3\right]$$

$$= (\lambda-2)(-\lambda^2+8\lambda-12) = -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

Variante : $-\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24$ à factoriser avec schéma de Horner.

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda = 2 \ (2) \quad \text{ou} \quad \lambda = 6$$

* vecteurs propres :

$\lambda = 2$: $\quad H - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x + 2y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2k - \ell \\ y = k \\ z = \ell \end{cases}$

1 équ. 3 inc $\Rightarrow$ 2 param.

$\Rightarrow \quad E_2 = \langle (-2;1;0)\,;\,(-1;0;1) \rangle \qquad \big(\text{mult}(2) = \dim(E_2) = 2\big)$

$\lambda = 6$: $\quad H - 6I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 + 3L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$\underset{L_3 + L_2}{\overset{-1/4 L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_6 = \langle (1;1;1) \rangle$

2 équ. 3 inc. $\Rightarrow$ 1 param.

Comme $\dim(E_2) + \dim(E_6) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, h est diagonalisable

et $\quad P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad H^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ex 1.5.13

$$B^* = ((2;-1);(3;1)) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \det(P) = 5 \Rightarrow P^{-1} \overset{\text{(formulaire)}}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = PH^*P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ex 1.5.14

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } H^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = PH^*P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ex 1.5.15

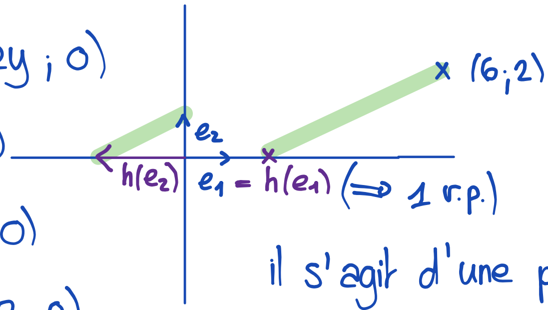
$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x;y) \longmapsto (x-2y\,;\,0)$

$(1;0) \longmapsto (1;0)$

$(0;1) \longmapsto (-2;0)$

$(6;2) \longmapsto (2\,;0)$



$(\Longrightarrow 1$ v.p.$)$

il s'agit d'une projection sur O_x de direction $(2;1)$ (ou $(-2;-1)$)

Plus précisément :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) \quad = 0 \iff \lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 : \quad H\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 2y = x \\ \quad 0 = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$$

<u>variante</u> : échelonner réduire la matrice $H - 1\cdot I$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 = \langle (1;0) \rangle$$

$$\lambda_2 = 0 : \quad H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_0 = \langle (2;1) \rangle$$

(H est diagonalisable car $\dim(E_1) + \dim(E_0) = 1+1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$)

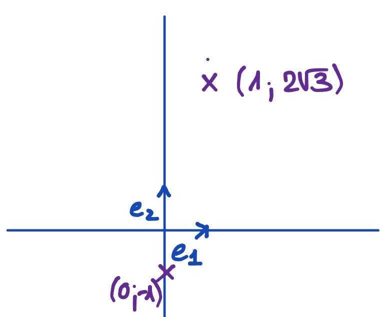
$\Rightarrow$ c'est une projection sur la droite $y=0$ de direction $(2;1)$ (ou parallèlement à la droite $x-2y=0$)

b) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

$(x;y) \longmapsto (x\,;\,2\sqrt{3}x - y)$

$(1;0) \longmapsto (1\,;\,2\sqrt{3})$

$(0;1) \longmapsto (0\,;\,-1)$



$$p(h) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

E_1 : $H\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2\sqrt{3}x - y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{3}k \end{cases}$

variante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{3}x - y = 0 \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow E_1 = \langle (1;\sqrt{3}) \rangle$

E_{-1} : $H\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ 2\sqrt{3}x - y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$

<u>variante</u> : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases}$

$\Rightarrow E_{-1} = \langle (0;1) \rangle$

$\Rightarrow$ symétrie d'axe $y = \sqrt{3}x$ de direction $(0;1)$

c) /

d) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

polynôme caractéristique : $p(h) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & -4 \\ 8 & -15-\lambda & -8 \\ -10 & 20 & 11-\lambda \end{vmatrix}$

$= (5-\lambda)\left[(-15-\lambda)(11-\lambda) + 160\right] - 8\left[-8(11-\lambda) + 80\right] - 10\left[64 + 4(-15-\lambda)\right]$

$= (5-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) - 8(8\lambda - 8) - 10(-4\lambda + 4)$

$= (5-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-1) - 64(\lambda-1) + 40(\lambda-1)$

$= (\lambda-1)(25 - \lambda^2 - 64 + 40) = (\lambda-1)(-\lambda^2+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = -1$

E_1 : par échelonnement de la matrice $H - 1I$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & -8 \\ -10 & 20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x-2y-z=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2k+\ell \\ y = k \\ z = \ell \end{cases} \quad \Rightarrow E_1 = \langle (2;1;0);(1;0;1) \rangle$

E_{-1} : par échelonnement de la matrice $H-(-1)I$

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & -14 & -8 \\ -10 & 20 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -2/3 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ L_3 + 5L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -2/3 \\ 0 & -5/3 & -4/3 \\ 0 & 10/3 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{3}{5}L_2 \to L_2 \\ \sim \\ L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + \frac{4}{3}L_2 \to L_1 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5}k \\ y = -\frac{4}{5}k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow E_{-1} = \langle (-2;-4;5) \rangle$$

(H est diagonalisable car $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

$\Rightarrow$ symétrie par rapport au plan $x-2y-z=0$ de direction $(-2;-4;5)$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

polynôme caractéristique : $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+2\right] = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ (de mult. 2)

Recherche des espace propres :

E_0 : par échelonnement de la matrice $H - 0I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ \sim \\ L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=-k \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_0 = \{(k;-k;0) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (1;-1;0) \rangle$$

$\underline{E_1}$: par échelonnement de la matrice $H - 1I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+2y-z=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2k+\ell \\ y=k \\ z=\ell \end{cases} \Rightarrow E_1 = \langle (-2;1;0);(1;0;1) \rangle$$

(H est diagonalisable car $\dim(E_0)+\dim(E_1) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

$\Rightarrow$ projection de direction $(1;-1;0)$ sur le plan $x+2y-z=0$

Ex 1.5.16

a) affinité d'axe $x + y = 0$ de direction $(3; -2)$ et de rapport 2

b) symétrie oblique d'axe $x - 2y = 0$ de direction $(1; 2)$ suivi d'une homothétie centrée à l'origine de rapport 3

c) projection de direction $(2; 3)$ sur la droite $2x + y = 0$ suivi d'une homothétie centrée à l'origine de rapport 7

d) homothétie centrée à l'origine de rapport 3

e) symétrie oblique de direction $(2; 4; -5)$ par rapport au plan $x - 2y - z = 0$ suivi d'une homothétie centrée à l'origine de rapport 10

f) projection parallèle au plan $x - z = 0$ sur la droite passant par l'origine de direction $(2; 1; 1)$ suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 5

g) affinité de plan $3x - y + z = 0$ de direction $(1; 2; 0)$ et de rapport 2

h) projection de direction $(1; 1; 1)$ sur le plan $x + y + z = 0$ suivi d'une homothétie centrée à l'origine est de rapport 4

Ex 1.5.20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $f(1;-1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(1;-1)$ est un vect. propre de f et $\lambda_1 = 2$ est la val. propre associée

$f(1;-2) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(1;-2)$ est un vect. propre de f et $\lambda_2 = 3$ est la val. propre associée

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = PA'P^{-1}$

d) $A^n = (PA'P^{-1})^n = P \cdot A' \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{=I} \cdot A' \cdot P^{-1} \cdot \ldots \cdot P \cdot A' \cdot P^{-1} = P \cdot (A')^n \cdot P^{-1}$ #

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ -2^n & -2 \cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$