Intégrales de fonctions rationnelles

Rappel :
$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln(|u|) + c$$

$$\int \frac{u'}{u^n}\,dx = \int u' \cdot u^{-n} = \frac{1}{-n+1}\,u^{-n+1} + c$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \left(Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right) dx \qquad \text{avec } \deg(N(x)) \geqslant \deg(D(x))$$

Décomposition en éléments simples

Soit $\frac{N(x)}{D(x)}$ une fraction irréductible avec $\deg(N(x)) < \deg(D(x))$

et $N(x)$ n'est pas la dérivée interne à un facteur près de $D(x)$

et $D(x)$ peut se décomposer en élts simples, car son $\Delta \geqslant 0$.

Alors la fraction se décompose de manière unique en somme de fractions de la forme :

un facteur $ax+b$ donne $\frac{A}{ax+b}$ $\quad A \in \mathbb{R}$

un facteur $(ax+b)^n$ donne $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ avec $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$

" $(\underbrace{ax^2+bx+c}_{\Delta<0})$ " $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

" $(ax^2+bx+c)^n$ " $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec $A_1, \dots A_n, B_1 \dots B_n \in \mathbb{R}$

Exples :

1) $I = \int \frac{4}{\underbrace{x^2+2x-3}_{\Delta > 0}} \, dx = \int \frac{4}{(x+3)(x-1)} \, dx$

$$\frac{0x+4}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (-A+3B)}{(x+3)(x-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+3B=4 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4B=4 \\ 4A=-4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-1}{x+3} \, dx + \int \frac{1}{x-1} \, dx = \underline{-\ln(|x+3|) + \ln(|x-1|) + C}$$

2) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 7x}{x^2 - 6x + 9}$ $\xrightarrow{\text{division}}$ car $\deg(N) > \deg(D)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 11x^2 + 7x & x^2 - 6x + 9 \\ \vdots & \hline & 2x+1 \\ \hline -5x - 9 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 1 + \frac{-5x-9}{\underbrace{x^2-6x+9}_{\Delta = 0}} = 2x + 1 + \frac{-5x-9}{\underbrace{(x-3)^2}_{\text{décomposition}}}$$

$$\Rightarrow \frac{-5x-9}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3) + B}{(x-3)^2} = \frac{Ax - 3A + B}{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -5 \\ -3A + B = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = -24 \end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) = 2x + 1 + \frac{-5}{x-3} + \frac{-24}{(x-3)^2}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = x^2 + x - 5\int \frac{1}{x-3}\,dx - 24\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + C$$

$$= \underline{\underline{x^2 + x - 5\ln|x-3| + \frac{24}{x-3} + C}}$$