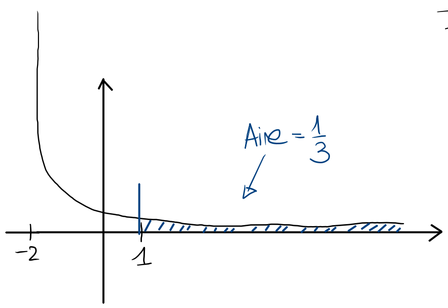
Intégrales généralisées

On étend le calcul intégral avec des limites pour des intervalles infinis ou contenant des valeurs interdites.

Exples

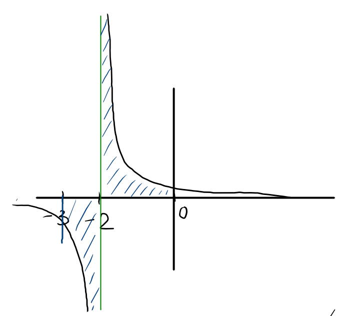
1) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty} -\frac{1}{x+2}\Bigg|_1^a$$

$$= \text{"}-\frac{1}{+\infty}\text{"} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



On dit que l'intégrale converge dans ce cas.
(car = nbre fini)

2) $$\int_{-3}^{0} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = I$$



Faux : $I = -\frac{1}{x+2}\Big|_{-3}^{0} = -\frac{1}{2} - (1) = -\frac{3}{2}$

car v.i : $-2 \in [-3;0]$

Correct : $$I = \lim_{\substack{a\to-2\\<}}\int_{-3}^{a} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + \lim_{\substack{a\to-2\\>}}\int_{a}^{0} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a\to-2\\<}} -\frac{1}{x+2}\Bigg|_{-3}^{a} + \lim_{\substack{a\to-2\\>}} -\frac{1}{x+2}\Bigg|_{a}^{0}$$

$$= \text{"}-\frac{1}{0_-}\text{"} + \frac{1}{-1} + \left(-\frac{1}{2} + \text{"}\frac{1}{0_+}\text{"}\right)$$

$$= +\infty - 1 - \frac{1}{2} + \infty = +\infty$$

Dans cas, on dit que l'intégrale diverge.