Problème 1.

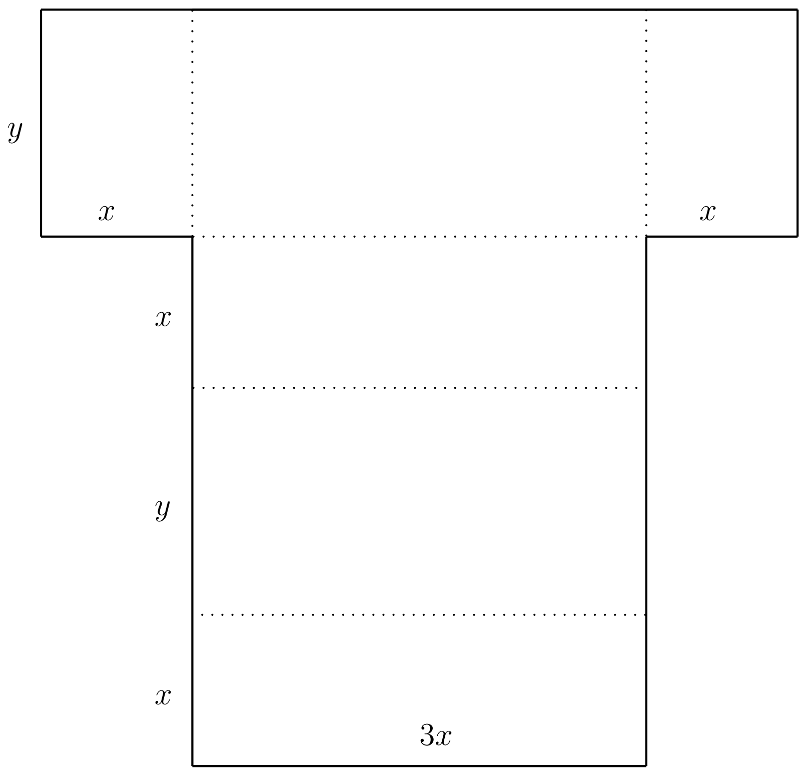
On désire construire une caisse en bois massif (sans couvercle) en forme de parallélépipède rectangle de volume égal à 5600 cm^3. On nomme x la largeur de la caisse (en cm). La hauteur de cette caisse mesure le double de la largeur.

Le bois prévu pour le fond coûte 0,10 CHF par cm^2, celui pour les faces latérales coûte 0,05 CHF par cm^2.

Déterminer les dimensions de la caisse pour lesquelles le coût de fabrication est minimal, puis calculer ce coût.

Problème 2.

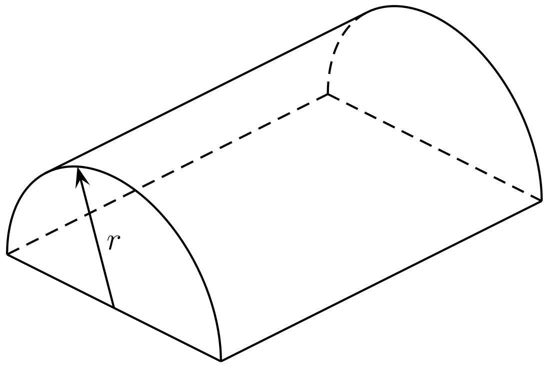
On souhaite fabriquer une boîte en forme de parallélépipède rectangle de volume 2304 cm^3. On découpe alors dans une feuille de carton le développement de la boîte comme donné dans la figure ci-dessous.



Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire de carton nécessaire à sa fabrication ? Et quelle est cette aire ?

Problème 3.

On souhaite construire une serre de 3750 m^3 de volume.
On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon r (en m) dont le prix est de 35 fr./m^2 et un toit rectangulaire dont le prix est de 15 fr./m^2, que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.

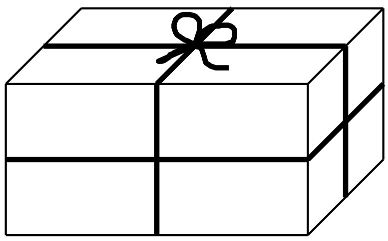


Déterminer les dimensions de la serre de coût minimal et déterminer ce coût.

Problème 4.

On désire confectionner un paquet en forme de parallélépipède rectangle dont la longueur est le double de la largeur, et dont le volume vaut 24 dm^3. On le ficelle selon l'illustration ci-dessous.

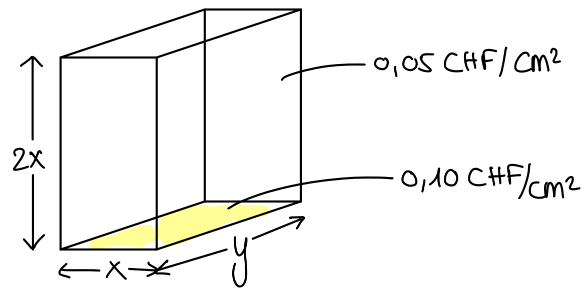
On désigne par x la largeur (en dm) du paquet.



En admettant qu'il faut 1 dm de ficelle pour le nœud, déterminer la largeur du paquet de sorte que la longueur totale de la ficelle soit minimale. Calculer alors les dimensions du paquet.

Prob 1

croquis :



$x, y > 0$

fct à optimiser : coût de fabrication : $f(x;y) = 0{,}1xy + 0{,}05(2\cdot 2x^2 + 2\cdot 2xy)$

$= 0{,}1xy + 0{,}2x^2 + 0{,}2xy$

$= 0{,}2x^2 + 0{,}3xy$ (1)

effectuer et simplifier

contrainte : volume = 5600 $\Leftrightarrow$ $2x^2y = 5600$

simplifier.

$y = \dfrac{5600}{2x^2} = \dfrac{2800}{x^2}$ (2)

(1) et (2)

$\Rightarrow$ $f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}3\cancel{x}\cdot\dfrac{2800}{x^{\cancel{2}}} = 0{,}2x^2 + \dfrac{840}{x}$ (tjrs simplifier au max avant de dériver)

$EV(f) = \mathbb{R}_+^*$

On dérive f pour trouver le minimum :

$\Rightarrow$ $f'(x) = 0{,}2\cdot 2x + 840\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = 0{,}4x + 840\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0{,}4x - \dfrac{840}{x^2}$

$= \dfrac{0{,}4x^3 - 840}{x^2}$

zéro de f' : $0{,}4x^3 - 840 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{840}{0{,}4} = 2100 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2100} \cong 12{,}81$

On vérifie avec un tableau de croissance si le zéro de f' est bien un min. :

x	0		$\sim 12{,}81$	
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(12{,}81) \cong 98{,}39 \Rightarrow \min(12{,}81 ; 98{,}39)$

$2x \cong 2\cdot 12{,}81 = 25{,}61$ et $y = \dfrac{2800}{x^2} \cong \dfrac{2800}{12{,}81^2} = 17{,}07$

La caisse doit mesurer env. 12,81 cm x 17,07 cm de fond et env. 25,61 cm de haut pour un coût minimal de 98,40 CHF.

Prob 2

croquis : voir donnée

fct à optimiser : aire : $\mathcal{A}(x;y) = 2\cdot 3x^2 + 2\cdot 3xy + 2\cdot xy = 6x^2 + 8xy$ (1) $x,y>0$

contrainte : volume = 2304 cm³ $\Leftrightarrow$ $3x^2y = 2304$

$$y = \frac{2304}{3x^2} = \frac{768}{x^2} \quad (2)$$

(1) et (2)

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = 6x^2 + 8\cancel{x}\cdot\frac{768}{x^{\cancel{2}}} = 6x^2 + \frac{6144}{x} \qquad ED(\mathcal{A}) = \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 12x - \frac{6144}{x^2} = \frac{12x^3 - 6144}{x^2} = \frac{12(x^3-512)}{x^2} = \frac{12(x-8)(x^2+8x+64)}{x^2}$$

zéro de $\mathcal{A}'$: 8

v.i. : 0 (2)

x	0		8	
$\mathcal{A}'$	‖	$-$	0	$+$
$\mathcal{A}$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

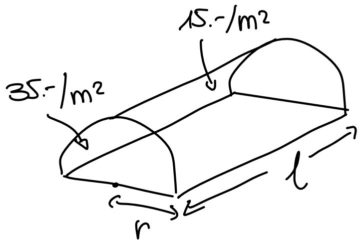
$\min(8;\mathcal{A}(8)) = (8;1'152)$

$\Rightarrow x = 8$, $y = \frac{768}{64} = 12$ et $3x = 24$

La boîte mesure 8cm x 12 cm x 24 cm pour une aire minimale de 1'152 cm².

Prob 3

croquis :



fonction à optimiser : coût : $C(r;\ell) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi r^2\cdot 35 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot \ell\cdot 15$

$= 35\pi r^2 + 15\pi r\ell \quad (1) \qquad r,\ell > 0$

contrainte : volume = 3750

$\frac{1}{2}\cdot\pi r^2\ell = 3750 \iff \ell = \frac{2\cdot 3750}{\pi r^2} = \frac{7500}{\pi r^2} \quad (2)$

(1) et (2)

$\Rightarrow \quad C(r) = 35\pi r^2 + 15\cancel{\pi r}\cdot\frac{7500}{\cancel{\pi r^2}} = 35\pi r^2 + \frac{112500}{r}$

$\Rightarrow \quad C'(r) = 70\pi r - \frac{112'500}{r^2} = \frac{70\pi r^3 - 112'500}{r^2}$

zéro de C' : $70\pi r^3 - 112'500 = 0 \iff r^3 = \frac{112'500}{70\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{112'500}{70\pi}} \cong 8$

V.i. : 0 (2)

x	0		8	
C'	‖	−	0	+
C	‖	↘	min	↗

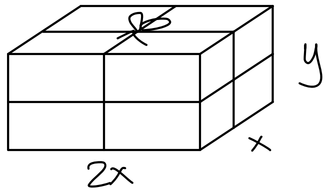
$\min(8; C(8)) = (8; 21'100)$

$\Rightarrow \quad r = 8$ et $\ell = \frac{7500}{\pi\cdot 64} \cong 37{,}3$

La serre a un rayon de 8m et une longueur de 37,3m pour un coût minimal de 21'100 CHF

Prob 4

croquis :



fct à optimiser : longueur de la ficelle : $f(x;y) = 1 + 2(x+y) + 2(x+2x) + 2(2x+y)$

$$= 1 + 2x + 2y + 6x + 4x + 2y$$

$$= 1 + 12x + 4y \quad (1) \qquad x, y > 0$$

contrainte : volume = 24 $\Leftrightarrow$ $2x^2y = 24$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{24}{2x^2} = \frac{12}{x^2}$ (2)

(1) et (2)

$$\Rightarrow f(x) = 1 + 12x + 4 \cdot \frac{12}{x^2} = 1 + 12x + \frac{48}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12 - \frac{48 \cdot 2x}{x^4} = 12 - \frac{96}{x^3} = \frac{12x^3 - 96}{x^3} = \frac{12(x^3-8)}{x^3}$$

zéro de f' : $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

V.i. : 0 (3)

x	0		2	
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖	↘	min	↗

min $(2; f(2)) = (2; 37)$

$\Rightarrow$ $x = 2$, $2x = 4$ et $y = \frac{12}{4} = 3$

Le paquet doit mesurer 2dm x 4dm x 3dm pour une longueur minimale de ficelle de 37dm2