

Principes fondamentaux

Ex 3.1.1.

$$25 \cdot 24 \cdot 23 = \underline{13'800} \text{ choix.}$$

Ex 3.1.2

$$20 \cdot 20 \cdot 20 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 20^3 + 6^3 = \underline{8'216} \text{ mots.}$$

Ex 3.1.3

a) $\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 2}^{2 \text{ ou } 4} = \underline{18} \text{ nombres pairs.}$

variante : $\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 1}^2 \text{ ou } \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 1}^4 = 9 + 9 = 18 \text{ nombres pairs.}$

b) au moins une fois le chiffre 1 :

tous les nombres — ceux qui ne contiennent pas le chiffre 1

$$18 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 18 - 8 = \underline{10} \text{ nombres.}$$

variante :

exactement 1 fois le chiffre 1 : $\frac{1}{1} \cdot \overbrace{2 \cdot 2}^{2 \text{ ou } 4} + \overbrace{2 \cdot 2}^{2 \text{ ou } 4} \cdot \frac{1}{2} = 8$

ou

" 2 fois " " : $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \overbrace{2}^{2 \text{ ou } 4} = 2$

$$\Rightarrow 8 + 2 = 10 \text{ nombres.}$$

Ex 3.1.4

$$8 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{720} \text{ manières}$$

la notation factorielle

Ex 3.2.1

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = \underline{24} \text{ manières de procéder.}$$

Ex 3.2.2

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = \underline{6} \text{ façons de s'asseoir sur un banc.}$$

Ex 3.2.3

$$9! \cdot 5 = \underline{1'814'400} \text{ secondes} = \underline{504} \text{ heures.}$$

Ex 3.2.4

a) $2! = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{6}$

c) $10! = \underline{3'628'800}$ avec m.à.c. 10 2nd 3

d) $2! \cdot 3! = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = \underline{12}$ e) f) g) avec m.à.c.

h) et i) trop grand nombre pour notre m.à.c.

Ex 3.2.5

a) $\frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{9} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = \underline{1'320}$

b) $\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = \underline{138'600}$

c) $\frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{8} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = \underline{495}$

d) $\frac{100!}{98! \cdot 5!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 5!} = \frac{100 \cdot 99}{120} = \frac{990}{12} = \underline{\frac{165}{2}}$

e) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(n-2) \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \underline{n(n-1)}$

f) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1) \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(n-1) \cdot \dots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \underline{(n+2)(n+1)n}$

Permutations

Ex 3.3.1

$$P_8 = 8! = \underline{40'320} \text{ façons}$$

Ex 3.3.2

Heuci : $P_5 = 5! = \underline{120}$ anagrammes

Entenke : $\overline{P}_7(3; 2; 2) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \underline{210}$ anagrammes

Ex 3.3.3

a) $P_{12} = 12! = \underline{479'001'600}$ possibilités

b) tomes 1 et 2 occupent un seul "goblet", il n'y a donc plus qu' M "goblets"

$$\begin{array}{c} \boxed{T_1 T_2} \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square \\ M \cdot 10 \cdot \dots 1 \end{array} = P_M = M! = \underline{39'916'800} \text{ possibilités.}$$

c) tomes 1 et 2 occupent un seul "goblet" mais peuvent permuer entre eux.

$$P_M \cdot P_2 = M! \cdot 2! = \underline{79'833'600} \text{ possibilités.}$$

↑
nbre de permutations des tomes 1 et 2.

Ex 3.3.4

$$P_9 = 9! = \underline{362'880} \text{ nombres}$$

Arrangements

Ex 3.4.1

a) 4 chiffres distincts avec 6 chiffres à disposition.

$$\begin{array}{cccc} _ & _ & _ & _ \\ A_4^6 & = & 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 & = \underline{360} \text{ nombres} \end{array}$$

b) 4 chiffres avec 6 chiffres à disposition.

$$\begin{array}{cccc} _ & _ & _ & _ \\ A_4^6 & = & 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 & = 6^4 = \underline{1'296} \text{ nombres} \end{array}$$

Ex 3.4.2

a) $_ _ _ _ _ _ _ _$

$$A_5^8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{6'720} \text{ façons}$$

$$\begin{array}{ccccccc} _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\ b) & 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 & = & P_3 \cdot A_2^5 & = & \underline{120} & \text{façons} \\ & \text{3 voitures direction} & & \text{et 2 voitures} & & & \\ & \text{sur 3 places} & & \text{sur 5 places dispo} & & & \end{array}$$

Ex 3.4.3

sans remise (pas de répétition) : $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = A_5^7 = \underline{2'520} \text{ tirages}$

avec remise (avec répétitions) : $7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7 = 7^5 = \overline{A_5^7} = \underline{16'807} \text{ tirages}$

Ex 3.4.4

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10} = \overline{A_{10}^2} = \underline{1'024} \text{ résultats}$$

Combinaisons

Ex 3.5.1

$$C_4^{15} = \left(\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} \right) = \underline{1'365} \text{ compositions.}$$

Ex 3.5.2

$$C_2^{12} = \left(\frac{12 \cdot 11}{2} \right) = \underline{66} \text{ poignées de mains}$$

Ex 3.5.3

a) $C_7^{12} = \underline{792}$ façons.

b) i) $C_4^8 \cdot C_3^4 = 70 \cdot 4 = \underline{280}$ façons

ii) au moins 1 : tout - aucun gerbers

$$C_7^{12} - C_7^8 = 792 - 8 = \underline{784} \text{ façons}$$

Problèmes mélangés

Ex 3.6.1

$$a) \quad \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \quad \text{personnes.} = A_5^6 = \underline{720} \text{ possibilités}$$

$$b) \quad \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = P_6 = \underline{720} \text{ possibilités aussi}$$

Ex 3.6.2

$$\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 2^6 = A_6^2 = \underline{64} \text{ symboles (espace compris)}$$

ou 63 symboles en enlevant l'espace (6 points "plats")

Ex 3.6.3

$$a) \quad \overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} = 26^4 = A_4^{26} = \underline{456'976} \text{ mots}$$

$$b) \quad \overline{26} \cdot \overline{25} \cdot \overline{24} \cdot \overline{23} = A_4^{26} = \underline{358'800} \text{ mots}$$

Ex 3.6.4

$$C_{13}^{52} = \underline{6,4 \cdot 10^{11}} \text{ mains}$$

Ex 3.6.5

$$1) \quad \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} = A_3^6 = \underline{120} \text{ nombres}$$

$$2) \quad \overline{20}^3 \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} = A_1^2 \cdot A_2^5 = \underline{40} \text{ nombres}$$

$$3) \quad \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{4}^{\text{3 ou 5 ou...}} = A_1^4 \cdot A_2^5 = \underline{80} \text{ nombres}$$

$$4) \quad \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{1}^5 = A_1^1 \cdot A_2^5 = \underline{20} \text{ nombres}$$

Ex 3.6.6

$$\overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot 5! = 6^5 \cdot 5! = \underline{933'120} \text{ façons}$$

↓
permutations
des 5 couleurs.

Ex 3.6.7

$$10 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 9 = \underline{3'960} \text{ menus}$$

Ex 3.6.8

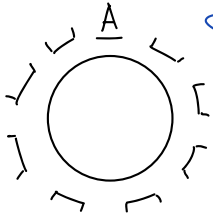
5 personnes choisissent parmi 8 sorties

$$\overline{8} \cdot \overline{8} \cdot \overline{8} \cdot \overline{8} \cdot \overline{8} = 8^5 = \overline{A_5^8} = \underline{32'768} \text{ manières}$$

$$\overline{8} \cdot \overline{7} \cdot \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} = A_5^8 = \underline{6720} \text{ manières}$$

Ex 3.6.9

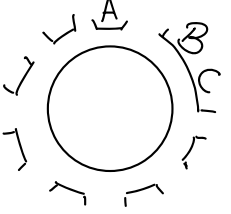
Question suppl: Neuf personnes prennent place sur un banc. De combien de manières peuvent-elles se disposer: $P_9 = 9! = 362'880$

a)  On place une personne A puis il reste 8 personnes à placer par rapport à A

$$\Rightarrow P_8 = 8! = \underline{40'320} \text{ manières}$$

Variante: $\frac{P_9}{9} = \frac{9!}{9} = 8! = 40'320$

nbre de rotations autour de la table qui ne modifient pas la pos. rel.

b)  Si B et C doivent être côte à côte, il n'y a plus que 7 (= 6+BC) "personnes" à placer.

$$\Rightarrow P_7 \cdot P_2 = 7! \cdot 2! = \underline{10'080} \text{ manières}$$

↑
permutation de B et C.

Ex 3.6.10

$$\overline{P}_{10}(5; 2; 3) = \frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = \underline{2520} \text{ façons}$$

Ex 3.6.11

1) $\overline{P}_n(4;4;2) = \frac{n!}{4!4!2!} = \underline{34'650}$ anagrammes

2) $\frac{S}{1} \dots \frac{S}{1} = \overline{P}_3(4; 2; 2) = \frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = \underline{3'780 \text{ anagrammes}}$

Ex 3.6.12

$$\underbrace{T_{1,1}, S}_{3} \cdot \underbrace{\quad}_{\dots} \cdot \underbrace{\quad}_{2} \cdot \underbrace{\quad}_{\dots} \cdot \underbrace{\quad}_{1} = P_3 \cdot \overline{P}_5(2;2) = 3! \cdot \frac{5!}{2!2!} = \underline{180 \text{ mds}}$$

Ex 3.6.13

pas de A : $P_4 = 4! = 24$
 exactement 1 A : $C_3^4 \cdot P_4 = 96$
 " 2 A : $C_2^4 \cdot \overline{P_4}(2) = 72$
 3 A : $C_1^4 \cdot \overline{P_4}(3) = 16$

$\Rightarrow 24 + 96 + 72 + 16 = \underline{208 \text{ mots}}$

Ex 3.6.14

a) $P_8 = 8! = \underline{40'320}$ manières

b) $\overbrace{\text{AB}} \quad \underbrace{\hspace{0.8cm}} \quad \underbrace{\hspace{0.8cm}} \quad \underbrace{\hspace{0.8cm}} \quad \underbrace{\hspace{0.8cm}} \quad \underbrace{\hspace{0.8cm}}$
 $= P_7 \cdot P_2 = 2 \cdot 5'040 = \underline{10'080}$ manières

c)
$$\begin{array}{cccccccc} H & F & H & F & & & & \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccccccc} F & H & F & & & & & \\ \boxed{4} & \cdot & \boxed{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$
$$= P_4 \cdot P_4 + P_4 \cdot P_4 = 2 \cdot P_4 \cdot P_4 = \underline{1152}$$

d) $\underline{\text{H}} \text{ L L L L} = P_4 \cdot P_5 = \underline{2'880}$ manières

e)  $P_4 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = \underline{384}$ manières

Ex 3.6.15

$$C_2^{12} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = \underline{66 \text{ parties}}$$

Ex 3.6.16

$$a) C_4^{25} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4!} = \underline{12'650 \text{ comités}}$$

$$b) A_4^{25} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = \underline{303'600 \text{ comités}}$$

Ex 3.6.17

$$C_5^{10} \cdot C_2^6 = 252 \cdot 15 = \underline{3780 \text{ commissions}}$$

Ex 3.6.18

$$C_3^{36} \cdot C_3^{27} \cdot C_3^{18} \cdot C_3^9 \cong \underline{2,1 \cdot 10^{19} \text{ distributions}}$$

Ex 3.6.19

$$a) C_8^{10} = \underline{45 \text{ choix}}$$

$$b) i) C_3^3 \cdot C_5^7 = 1 \cdot C_5^7 = \underline{21 \text{ choix}}$$

ii) exactement 4 ou exactement 5

$$C_4^5 \cdot C_4^5 + C_5^5 \cdot C_3^5 = 25 + 10 = \underline{35 \text{ choix}}$$

variante: "tout - ni 4 ni 5" $\Leftrightarrow$ "tout - exactement 3"

$$C_8^{10} - C_3^5 \cdot C_5^5 = 45 - 10 \cdot 1 = 35 \text{ choix}$$

Ex 3.6.20

$$a) C_4^4 \cdot C_1^{32} = 1 \cdot 32 = \underline{32 \text{ manières}}$$

$$b) C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 6 \cdot 6 \cdot 28 = \underline{1'008 \text{ manières}}$$

c) "au moins un as" $\Leftrightarrow$ "tout - aucun as"

$$C_5^{36} - C_5^{32} = \underline{175'616 \text{ manières}}$$

Ex 3.6.21

$$\overline{P}_8(4;4) = \frac{8!}{4!4!} = \underline{70} \text{ réponses} = C_4^8 \left(C_4^4 \right) = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

Ex 3.6.22

$$\begin{array}{c} 1 \times 2 \\ \text{┐} \text{┐} \text{┐} \text{┐} \dots \text{┐} \\ 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 \end{array} = \overline{A}_{13}^3 = 3^{13} = \underline{1'534'323} \text{ pronostics}$$

Ex 3.6.23

1) $\overline{A}_{20}^2 = 2^{20} = 1'048'576$ séquences

2) $\overline{P}_{20}(19) = \frac{20!}{19!} = 20 = C_1^{20}$

3) $\overline{P}_{20}(4,16) = \frac{20!}{4!16!} = 4845 = C_4^{20} = C_{16}^{20}$

4) $\overline{P}_{20}(10,10) = \frac{20!}{10!10!} = 184'756 = C_{10}^{20}$

5) $1 = \overline{P}_{20}(20) = \frac{20!}{20!} = C_{20}^{20}$

Ex 3.6.24

1) $C_6^{45} = \underline{8'145'060}$ façons

2) $\underline{1} = C_6^6$ poss. d'avoir les 6 "bons" numéros

3) $C_6^{39} = \underline{3'262'623}$ poss. d'avoir aucun "bon" numéro

4) $C_3^6 \cdot C_3^{39} = 20 \cdot 9139 = \underline{182'780}$ poss. d'avoir 3 "bons" num.

Ex 3.6.25

$$a) C_3^{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \underline{220} \text{ tirages}$$

$$b) A_3^{12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = \underline{1320} \text{ tirages}$$

$$c) \overline{A}_3^{12} = 12 \cdot 12 \cdot 12 = \underline{1728} \text{ tirages}$$

Ex 3.6.26

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = \underline{59'049} \text{ possibilités.}$$

Ex 3.6.27

$$a) C_5^{40} = \underline{658'008} \text{ comités}$$

$$b) C_3^{25} \cdot C_2^{15} = 2'300 \cdot 105 = \underline{241'500} \text{ comités}$$

$$c) \text{ exact. 3 dames ou exact. 4 ou exact. 5}$$

$$\begin{aligned} & C_3^{25} \cdot C_2^{15} + C_4^{25} \cdot C_1^{15} + C_5^{25} \\ &= 241'500 + 189'750 + 53'130 = \underline{484'380} \end{aligned}$$

Ex 3.6.28

$$\frac{C_2^7 \cdot C_2^5}{P_2} = \frac{21 \cdot 10}{2} = \underline{105} \text{ possibilités} \quad \left(= \frac{\overline{P}_7(2;2;3)}{P_2} \right)$$

Ex 3.6.29

$$\frac{C_5^{15} \cdot C_5^{10} \cdot C_5^5}{P_3} = \frac{3003 \cdot 252 \cdot 1}{6} = \underline{126'126} \quad \left(= \frac{\overline{P}_{15}(5;5;5)}{P_3} \right)$$

Ex 3.6.30

$$\overline{P}_8(4;3) = \frac{8!}{4!3!} = \underline{280} \text{ signaux}$$

Ex 3.6.31

$$a) 19 \cdot 18 \cdot 17 = A_3^{19} = \underline{5814} \text{ façons}$$

$$b) 19 \cdot 19 \cdot 19 = \overline{A}_3^{19} = \underline{6859} \text{ façons}$$

$$c) C_3^{19} = \underline{369} \text{ façons}$$

Ex 3.6.32

$$a) \begin{array}{ccccccc} _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\ 10 & \cdot 10 & \cdot \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} = 10^5 = \overline{A}_5^{10} = \underline{100'000} \text{ séquences}$$

$$b) \underbrace{C_2^9}_{\substack{\text{2 chiffres} \\ \text{diff. parmi 9}}} \cdot \overline{P}_5(3) + \underbrace{C_1^9}_{\substack{\text{1 chiffre} \\ \text{parmi 9} \\ \text{qui sera répété}}} \cdot \overline{P}_5(3;2) = 36 \cdot \frac{5!}{3!} + 9 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 720 + 90 = \underline{810} \text{ séquences}$$

$$\text{variante: } \underbrace{C_3^5}_{\substack{\text{position} \\ \text{des 7}}} \cdot \overline{A}_2^9 = 10 \cdot 9^2 = 810$$

$$c) \underbrace{810}_{b)} + C_1^9 \overline{P}_5(4) + C_5^5 = 810 + 45 + 1 = \underline{856} \text{ séquences}$$

$$\text{variante: } 810 + C_4^5 \cdot \overline{A}_1^9 + C_5^5$$

$$d) \text{ tout - aucun 7 : } 10^5 - 9^5 = \underline{40'951} \text{ séquences}$$

Ex 3.6.36

$$a) \overline{P}_7(2,3,2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \underline{210} \text{ nombres}$$

$$b) \begin{array}{c} \underline{1} \underline{1} _ \dots \\ \overline{P}_5(3,2) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \underline{1} \underline{2} _ \dots \\ \overline{P}_5(2,2) \end{array} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 10 + 30 = \underline{40}$$

Ex 3.6.37

$$a) \text{ forcément 4 bleus : } C_4^5 = \underline{5} \text{ façons}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \text{ RB : } C_4^8 - C_4^5 \xleftarrow{\text{pas tous bleus}} = 70 - 5 = 65 \\ \text{RV : } C_4^5 = 5 \\ \text{BV : } C_4^7 - C_4^5 = 35 - 5 = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 65 + 5 + 30 = \underline{100} \text{ façons}$$

$$\left. \begin{array}{l} c) 2R1B1V = C_2^3 \cdot C_1^5 \cdot C_1^2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30 \\ 1R2B1V = C_1^3 \cdot C_2^5 \cdot C_1^2 = 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60 \\ 1R1B2V = C_1^3 \cdot C_1^5 \cdot C_2^2 = 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 30 + 60 + 15 = \underline{105} \text{ façons}$$

(variante : tout - tous de la même couleur - 2 couleurs

$$C_4^{10} - 100 - 5 = 210 - 105 = 105$$

Ex 3.6.39

a) $C_3^{36} = \underline{7'140}$ mains

b) $C_3^4 = \underline{4}$ mains

c) $C_1^4 \cdot C_2^4 = \underline{24}$ mains

d) $C_3^{32} = \underline{4960}$ mains

e) "total - aucuns as" : $7'140 - 4960 = \underline{2180}$ mains

f) $C_1^4 \cdot C_2^{32} = \underline{1984}$ mains

⚠ erreur solution brochure