Ex 3.3.21

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \overset{\text{groupement}}{=} x^2(x+2) - 1\cdot(x+2)$

$\overset{\text{mise en év.}}{=} (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x+1)(x-1)$

$\Rightarrow$ zéros : -2 ; -1 et 1

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On peut aussi faire avec tous les facteurs (mais c'est plus long ...)

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x)(2-x) \overset{\text{mise en év.}}{=} x(\underbrace{x^2-x+1}_{\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0})(2-x)$

$x \to 0$; $(2-x) \to 2$

$\Rightarrow$ zéros : 0 et 2

(valeur de) x		0		2	
(signe de) x	$-$	0	$+$		$+$
x^2-x+1	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

schéma de Horner :

1) recherche d'un zéro parmi les diviseurs du terme constant 4 (± 1, ± 2 ou ± 4)

$f(-1) = -1 + 5 - 8 + 4 = 0$ ✓ -1 est un zéro de f.

2)
$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 5 & 8 & 4 \\
-1 & & -1 & -4 & -4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

3) $f(x) = (x+1)(x^2+4x+4) = (\underset{\downarrow -1}{x+1})(\underset{\downarrow -2}{x+2})^2$

$\Rightarrow$ zéros : -1 et -2 (2)

tableau de signe :

x		-2		-1	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (\underset{\downarrow -1}{x+1})^3$ (c'est un produit rem.)

$\Rightarrow$ zéro : -1

tableau de signe :

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

car le signe de $(x+1)^3$ est le même que celui de $x+1$:

"$(-)^3 = -$" et "$(+)^3 = +$"

Ex. 3.3.23

a) $2x+5 \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x \geqslant -4$

$\Leftrightarrow \quad x \geqslant -2 \quad \Rightarrow \quad S = [-2; +\infty[$

b) $5-2x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \quad -2x \geqslant -4 \quad |\div(-2)$ ⚠

$\Leftrightarrow \quad x \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad S =]-\infty; 2]$

c) $-4a-5 < a+5$

$\Leftrightarrow \quad -5a < 10 \quad |\div(-5)$ ⚠

$\Leftrightarrow \quad a > -2 \quad \Rightarrow \quad S =]-2; +\infty[$

d) $-(7-2x)-8 > 0$

$2x - 15 > 0$

$2x > 15$

$x > \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad S =]\frac{15}{2}; +\infty[$

e) $1-3x \leqslant \frac{1}{3}x + 2 \quad |\cdot 3$

$3 - 9x \leqslant x + 6$

$-10x \leqslant 3 \quad |\div(-10)$ ⚠

$x \geqslant -\frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad S = [-\frac{3}{10}; +\infty[$

f) $3(1-x) > \frac{2}{5}x$

$3-3x > \frac{2}{5}x \quad |\cdot 5$

$15-15x > 2x$

$-17x > -15 \quad |\div(-17)$ ⚠

$x < \frac{15}{17} \quad \Rightarrow \quad S =]-\infty; \frac{15}{17}[$

Ex 3.3.24

a) $-3x^2-42x-147 \geq 0$ $\quad a=-3<0$

$\Leftrightarrow -3(x^2+14x+49) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3(x+7)^2 \geq 0$ $\quad$ zéro : -7

signe :

x		-7	
$-3(x+7)^2$	$-$	0	$-$

$\Rightarrow S=\{-7\}$

b) $-4x^2+24x-42<0$ $\quad a=-4<0$

$\Leftrightarrow -2(\underbrace{2x^2-12x+21}) < 0$

$\Delta = 12^2-4\cdot 2\cdot 21 = -24 < 0$ pas de zéro

signe :

x	
$-4x^2+24x-42$	$-$

$\Rightarrow S=\mathbb{R}$

d) $x^2+10x+25>0$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 > 0$ $\quad$ zéro : -5 (2)

signe :

x		-5	
$x^2+10x+25$	$+$	0	$+$

$\Rightarrow S=\mathbb{R}-\{-5\}$ ou $=\,]-\infty;-5[\,\cup\,]-5;+\infty[$

e) $4x^2>0$ $\quad$ zéro : 0 $\quad a=4>0$

signe :

x		0	
$4x^2$	$+$	0	$+$

$\Rightarrow S=\mathbb{R}^*$

f) $-x^2-6x-9 \geq 0$ $\Leftrightarrow -(x^2+6x+9) \geq 0$ $\quad a=-1<0$

$\Leftrightarrow -(x+3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ zéro : -3

signe :

x		-3	
$-x^2-6x-9$	$-$	0	$-$

$\Rightarrow S=\{-3\}$

g) $-x^2+14x-48 > 0$ $\qquad a=-1<0$

$-(x^2-14x+48)>0$

$-(x-6)(x-8)>0$ $\qquad$ zéros : 6 et 8

signe :

x		6		8	
$-x^2+14x-48$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow S =]6;8[$

h) $-5x^2+30x-40 > 0 \iff -5(x^2-6x+8)>0$ $\qquad a=-5<0$

$\iff -5(x-2)(x-4)>0$

$\Rightarrow$ zéros : 2 et 4

signe :

x		2		4	
$-5x^2+30x-40$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow S =]2;4[$

i) $-5x^2-20x-20 > 0 \iff -5(x^2+4x+4)>0$ $\qquad a=-5<0$

$\iff -5(x+2)^2>0$

$\Rightarrow$ zéro : -2

signe

x		-2	
$-5x^2-20x-20$	$-$	0	$-$

$\Rightarrow S = \emptyset$

Ex 3.3.25

a) $x^3-4x^2+x+6>0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-5x+6)>0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)>0$

Factorisation avec schéma de Horner :

$x=-1$: $-1-4-1+6=0$ ✓

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

zéro : -1, 2 et 3

signe :

x		-1		2		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
x^3-4x^2+x+6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad S=\,]-1;2[\,\cup\,]3;+\infty[$

c) $x^3-x^2-x+1\leqslant 0$

$x^2(x-1)-(x-1)\leqslant 0$

$(x-1)(x^2-1)\leqslant 0$

$(x-1)^2(x+1)\leqslant 0$

zéro : -1 et 1

signe :

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
x^3-x^2-x+1	$-$	0	$+$	0	$+$

ou

x		-1		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x^3-x^2-x+1	$-$	0	$+$	0	$+$

$\Rightarrow \quad S=\,]-\infty;-1]\cup\{1\}$

b) $x^5 - 5x^3 + 4x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x^4 - 5x^2 + 4) \leqslant 0$

$\circledast \Leftrightarrow x(x^2-4)(x^2-1) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) \leqslant 0$

$\circledast$ chgmt de variable possible : $x^2 = y$

$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = (y-4)(y-1)$

$\Rightarrow (x^2-4)(x^2-1)$

zéros et signe : en version rapide : tous les zéros sont simples

et $f(1000)$: $+ \cdot + \cdot \ldots \cdot + = +$

x		-2		-1		0		1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 0] \cup [1 ; 2]$

Ex 3.3.26

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0 \iff \dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)} > 0$

$-2 \quad 2$: zéros

$0 \quad 1$: v.i

$ED = \mathbb{R}^* - \{1\}$

signe :

x		-2		0		1		2	
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty;-2[\ \cup\ ]0;1[\ \cup\ ]2;+\infty[$

b) $\dfrac{x(2x-3)^2}{x^2-4} < 0$

$0 \quad 3/2$: zéros

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$

$-2 \quad 2$ v.i.

$ED = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

signe :

x		-2		0		$3/2$		2	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(2x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(2x-3)^2}{x^2-4}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty;-2[\ \cup\ ]0;\tfrac{3}{2}[\ \cup\ ]\tfrac{3}{2};2[$

e) $\dfrac{x-3}{\underbrace{x^2-3x+2}_{(x-2)(x-1)}} > 0$ zéro : 3

$ED = \mathbb{R} - \{1;2\}$

$(x-2)(x-1) \to 2 \quad 1$: v.i.

signe :

x		1		2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-3}{x^2-3x+2}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad S =]1;2[\cup]3;+\infty[$

f) $\dfrac{3x^2-7x-20}{\underbrace{x^2+4x-12}_{(x+6)(x-2)}} \leq 0$

$ED = \mathbb{R} - \{-6;2\}$

v.i. -6 et 2

zéros : $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 3 \cdot (-20) = 289$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 17}{6} = \begin{cases} 4 \\ -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

signe :

x		-6		$-5/3$		2		4	
$3x^2-7x-20$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x^2+4x-12$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
...	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad S =]-6;-\frac{5}{3}] \cup]2;4]$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad ED = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

zéro : 0 et v.i : ± 1

signe :

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$f(1000) : \dfrac{+}{+} = +$

$\Rightarrow \quad S =]-\infty ; -1[\cup [0 ; 1[$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$ zéro : 3

v.i. : $\Delta = 1-8 < 0 \Rightarrow$ pas de vi. $\Rightarrow ED = \mathbb{R}$

signe :

x		3	
$x-3$	$-$	0	$+$
$-x^2+x-2$	$-$		$-$
$\dfrac{x-3}{-x^2+x-2}$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow S =]-\infty ; 3[$

l) $\dfrac{12x^2-13x-14}{x-2} < 0$

v.i. : 2 $\Rightarrow ED = \mathbb{R} - \{2\}$

zéros : $\Delta = 841 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{13 \pm 29}{24} = \begin{cases} 7/4 \\ -2/3 \end{cases}$

signe :

x		$-2/3$		$7/4$		2	
$12x^2-13x-14$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{12x^2-13x-14}{x-2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$\Rightarrow S =]-\infty ; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{7}{4} ; 2[$

Ex 3.3.27

a) $f(x) = 3x^2 + 18x + 36 = 3(x^2 + 6x + 12)$

zéro : $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -12 < 0$ pas de zéro et $a = 3 > 0$

$\Rightarrow$ tableau de signe

x	
$f(x)$	$+$

(du signe de a)

b) $f(x) = -5x^2 + 60x - 180 = -5(x^2 - 12x + 36) = -5(x-6)^2$

zéro : 6 et $a = -5 < 0$

$\Rightarrow$ tableau de signe

x		6	
$f(x)$	$-$	ϕ	$-$

(du signe de a)

c) $f(x) = -8x^2 + 48x - 82 = -2(4x^2 - 24x + 41)$ $a = -8$

zéro : $\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 41 = -80 < 0 \Rightarrow$ pas de zéro

$\Rightarrow$ tableau de signe

x	
$f(x)$	$-$

(du signe de a)

d) $f(x) = -4x^2 - 80x - 391$

zéro : $\Delta = (-80)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-391) = 144$ et $a < 0$

$$x_{1,2} = \frac{80 \pm 12}{-8} = \begin{cases} -23/2 \\ -17/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tableau de signe :

x		$-23/2$		$-17/2$	
$f(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

(du signe de a sauf entre les zéros)

e) $f(x) = -4x^2 - 16x - 25$ $a = -4 < 0$

$\Delta = -144 < 0$
pas de zéro

$\Rightarrow$ tableau de signe :

x	
$f(x)$	$-$

(du signe de a)

Ex 3.3.28

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

$= (x+1)(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$

$= (x+1)\left[x^2(x-2) - 9(x-2)\right]$

$= (x+1)(x-2)(x^2-9)$

$= (x+1)(x-2)(x+3)(x-3)$

zéros : -1 ; 2 ; -3 ; 3

candidats : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 ; \pm 9 ; \pm 18$

$x = -1$: $1 + 1 - 11 - 9 + 18 = 0$ ✓

Horner :

	1	−1	−11	9	18
−1		−1	2	9	−18
	1	−2	−9	18	0

signe :

x		-3		-1		2		3	
$(x+1)(x-2)$	+		+	0	−	0	+		+
x^2-9	+	0	−		−		−	0	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

esquisse du graphe :