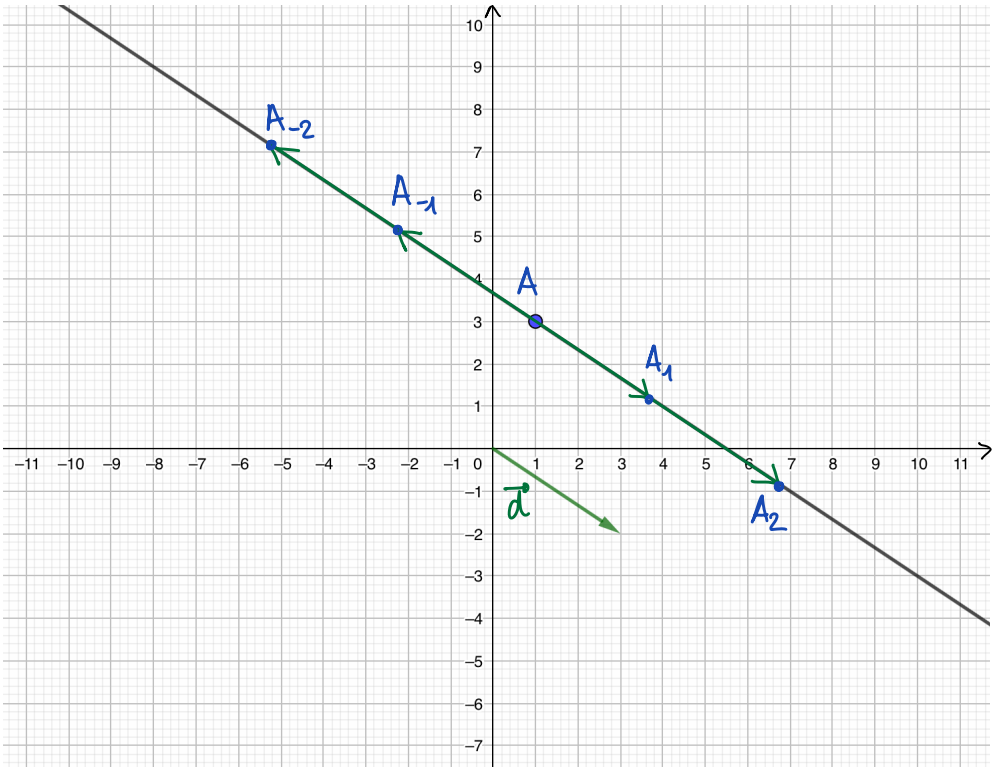
Ex 3.1.1

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

passant par le point A (1;3)

vecteur directeur $\vec{d}$



Ex 3.1.2

$$d : \begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = 2 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$(6;-1) \in d$ car $\begin{cases} 6 = 1 - 5k \\ -1 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = -5k \\ -3 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases} > = \checkmark$

$(3;-2) \notin d$ car $\begin{cases} 3 = 1 - 5k \\ -2 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -5k \\ -4 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2/5 \\ k = -4/3 \end{cases} > \neq$

$(1;0) \notin d$ car $\begin{cases} 1 = 1 - 5k \\ 0 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5k \\ -2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -2/3 \end{cases} > \neq$

$\left(-6; \frac{31}{5}\right) \in d$ car $\begin{cases} -6 = 1 - 5k \\ \frac{31}{5} = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = -5k \\ \frac{21}{5} = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7/5 \\ k = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} \end{cases} > = \checkmark$

Ex 3.1.3

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2-k & 1^e \\ y = 5+2k & 2^e \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

a) situé sur Ox : $(x;0) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 5+2k \iff k = -\frac{5}{2}$ dans la 2e équa.

dans la 1e équ.

$\Rightarrow x = 2-\left(-\frac{5}{2}\right) = 2+\frac{5}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow A\left(\frac{9}{2};0\right)$

b) situé sur Oy : $(0;y) \Rightarrow x = 0 \overset{1^e}{\Rightarrow} 0 = 2-k \iff k = 2$

$\overset{2^e}{\Rightarrow} y = 5+2\cdot 2 = 9 \Rightarrow B(0;9)$

c) abscisse $= 7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow 7 = 2-k \iff k = -5$

$\Rightarrow y = 5+2\cdot(-5) = -5 \Rightarrow C(7;-5)$

d) ordonnée $= -2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow -2 = 5+2k \iff -7 = 2k \iff k = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow x = 2-\left(-\frac{7}{2}\right) = 2+\frac{7}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow D\left(\frac{11}{2};-2\right)$

e) deux coordonnées égales : $x = y$

on peut égaler les équa. : $2-k = 5+2k \iff -3k = 3 \iff k = -1$

et remplacer dans 1 des 2 équations : $x = 2-(-1) = 3 = y$

$\Rightarrow E(3;3)$

f) situé sur la droite $\begin{cases} x = 1+\ell \\ y = -5-8\ell \end{cases}, \ell \in \mathbb{R}$

à l'intersection de deux droites : les x sont égaux et les y aussi

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-k = 1+\ell \\ 5+2k = -5-8\ell \end{cases} \iff \begin{cases} k+\ell = 1 & \Big| -2 \\ 2k+8\ell = -10 & \Big| 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -2k - 2\ell = -2 \\ + \quad 2k + 8\ell = -10 \\ \hline 6\ell = -12 \end{array}$$

$$\ell = -2$$

En remplaçant ℓ par -2 dans les équations paramétriques de la 2e droite, on obtient

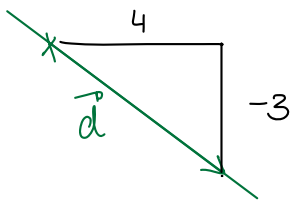
$$\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -5 + 16 = 11 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{F(-1;11)}$$

Ex 3.1.4

a) $A(3;5)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

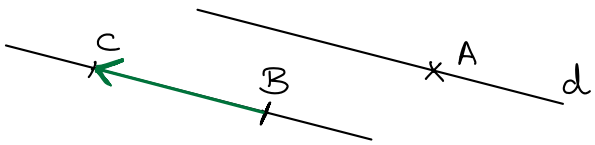
b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-3) \\ -5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $\Rightarrow$ $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

d) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur



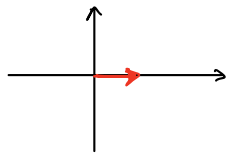
$\Rightarrow$ $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} = -40 + 40 = 0$. Donc $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

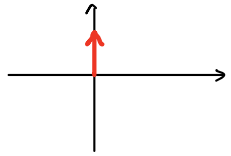
$$\Rightarrow \quad d: \begin{cases} x = -7 + 5k \\ y = 10 + 8k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

f) Un droite horizontale a comme vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ $d : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

g) Une droite verticale a comme vecteur directeur $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ $d : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Ex 3.1.5

$d : 3x - 8y + 2 = 0$

a) $(0;\frac{1}{4}) \in d$ car $3\cdot 0 - 8\cdot\frac{1}{4} + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$ ✓

b) $(-\frac{2}{3};0) \in d$ car $3\cdot(-\frac{2}{3}) - 8\cdot 0 + 2 = -2 - 0 + 2 = 0$ ✓

c) $(5;-1) \notin d$ car $3\cdot 5 - 8\cdot(-1) + 2 = 15 + 8 + 2 = 25 \neq 0$

d) $(2;1) \in d$ car $3\cdot 2 - 8\cdot 1 + 2 = 6 - 8 + 2 = 0$ ✓

Ex 3.1.6

$d : -3x + 2y - 6 = 0$

a) abscisse = 3 $\Rightarrow$ $x = 3$ $\Rightarrow$ $-3\cdot 3 + 2y - 6 = 0$

$2y - 15 = 0$

$y = \frac{15}{2}$ $\Rightarrow$ $A(3;\frac{15}{2})$

b) ordonnée = -4 $\Rightarrow$ $y = -4$ $\Rightarrow$ $-3x + 2\cdot(-4) - 6 = 0$

$-3x - 14 = 0$

$x = -\frac{14}{3}$ $\Rightarrow$ $B(-\frac{14}{3};-4)$

c) deux coordonnées égales : $x = y$

$\Rightarrow$ $-3x + 2x - 6 = 0$

$-x - 6 = 0$

$x = -6$ $\Rightarrow$ $C(-6;-6)$

d) sur Ox : $y=0 \Rightarrow -3x+2\cdot 0-6=0$

$-3x-6=0$

$x=-2 \Rightarrow \underline{D(-2;0)}$

e) sur Oy : $x=0 \Rightarrow -3\cdot 0+2y-6=0$

$2y-6=0$

$y=3 \Rightarrow \underline{E(0;3)}$

f) situé sur $5x-7y+4=0$.

On cherche le point d'intersection de ces deux droites en résolvant le système formé des deux équations :

$$\begin{cases} -3x+2y-6=0 \\ 5x-7y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=6 \\ 5x-7y=-4 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} \cdot 7 & \cdot 5 \\ \cdot 2 & \cdot 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -21x+14y=42 \\ +\ 10x-14y=-8 \\ \hline -11x=34 \\ x=-\frac{34}{11} \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{array}{r} -15x+10y=30 \\ +\ 15x-21y=-12 \\ \hline -11y=18 \\ y=-\frac{18}{11} \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{F\left(-\frac{34}{11};-\frac{18}{11}\right)}$

Ex 3.1.7

a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 4 \Rightarrow x + 4y + c = 0$
$A(3;5) \in d \Rightarrow 3 + 4 \cdot 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -23$
$\Rightarrow$ d : $x + 4y - 23 = 0$

b) $\vec{d} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -3$ et $b = -7 \Rightarrow -3x - 7y + c = 0$
$A(-3;-2) \in d \Rightarrow 9 + 14 + c = 0 \Leftrightarrow c = -23$
d : $-3x - 7y - 23 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 7y + 23 = 0$

c) $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = 3$ et $b = 4 \Rightarrow 3x + 4y + c = 0$
$A(2;-4) \in d \Rightarrow 6 - 16 + c = 0 \Leftrightarrow c = 10$
$\Rightarrow$ d : $3x + 4y + 10 = 0$

d) $\vec{d} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 4 \Rightarrow x + 4y + c = 0$
$A(5;2) \in d \Rightarrow 5 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13$
$\Rightarrow$ d : $x + 4y - 13 = 0$

e) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 8$ et $b = -5 \Rightarrow 8x - 5y + c = 0$
$A(-7;10) \Rightarrow -56 - 50 + c = 0 \Leftrightarrow c = 106$
$\Rightarrow$ d : $8x - 5y + 106 = 0$

f) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$ et $b = -1 \Rightarrow -y + c = 0$
$A(0;-2) \in d : 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$
$\Rightarrow$ d : $-y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow y + 2 = 0$

g) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 0 \Rightarrow x + c = 0$
$A(8;12) \in d : 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$
$\Rightarrow$ d : $x - 8 = 0$

Autre méthode :

a) $\begin{cases} x = 3 - 4k \mid \cdot 1 \\ y = 5 + k \mid \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 3 - 4k \\ 4y & = & 20 + 4k \\ \hline x + 4y & = & 23 \end{array} \Rightarrow x + 4y - 23 = 0$

b) $\left\{\begin{array}{l} x=-3+7k \\ y=-2-3k \end{array}\right| \begin{array}{l}\cdot 3 \\ \cdot 7\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x & = & -9+21k \\ 7y & = & -14-21k \\ \hline 3x+7y & = & -23 \end{array} \Rightarrow \quad 3x+7y+23=0$

c) $\left\{\begin{array}{l} x=2+4k \\ y=-4-3k \end{array}\right| \begin{array}{l}\cdot 3 \\ \cdot 4\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x & = & 6+12k \\ 4y & = & -16-12k \\ \hline 3x+4y & = & -10 \end{array} \Rightarrow \quad 3x+4y+10=0$

d) $\left\{\begin{array}{l} x=5-4k \\ y=2+k \end{array}\right| \begin{array}{l}\cdot 1 \\ \cdot 4\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 5-4k \\ 4y & = & 8+4k \\ \hline x+4y & = & 13 \end{array} \Rightarrow \quad x+4y-13=0$

e) $\left\{\begin{array}{l} x=-7+5k \\ y=10+8k \end{array}\right| \begin{array}{l}\cdot 8 \\ \cdot(-5)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 8x & = & -56+40k \\ -5y & = & -50-40k \\ \hline 8x-5y & = & -106 \end{array} \Rightarrow \quad 8x-5y+106=0$

f) $y=-2 \quad \Rightarrow \quad y+2=0$

g) $x=8 \quad \Rightarrow \quad x-8=0$

Ex 3.1.8 $A(3;-2) \quad B(-3;2) \quad C(0;-1)$

m_A : passe par A et par $M_{BC}\left(\frac{-3+0}{2}; \frac{2-1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM_{BC}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-3 \\ \frac{1}{2}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d}_{m_A} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_A : 5x+9y+c=0$

$A \in m_A : 15-18+c=0$

$c=3$

$\Rightarrow m_A : 5x+9y+3=0$

m_C : passe par C et par $M_{AB}\left(\frac{3-3}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) = (0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM_{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ drte verticale passant par $C(0;-1)$

$\Rightarrow m_C : x=0$

m_B : passe par B et par $M_{AC}\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM_{AC}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+3 \\ -\frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d}_{m_B} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_B : \ 7x+9y+c=0$$

$$B \in m_B \Rightarrow -21+18+c=0, \ c=3$$

$$\Rightarrow m_B : \ 7x+9y+3=0$$

$$G\left(\frac{3-3+0}{3}; \frac{-2+2-1}{3}\right) = G\left(0; -\frac{1}{3}\right)$$

Ex 3.1.9

a) $2x-3y+6=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+2$

b) $5x+3y-15=0 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}x+5$

c) $7x+3y=0$

$\Leftrightarrow y=-\frac{7}{3}x$

d) $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

e) $-3y+9=0 \Leftrightarrow y=3$

f) $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

g) $-5y=0 \Leftrightarrow y=0$

h) $4(x+2)=5(y-3)$

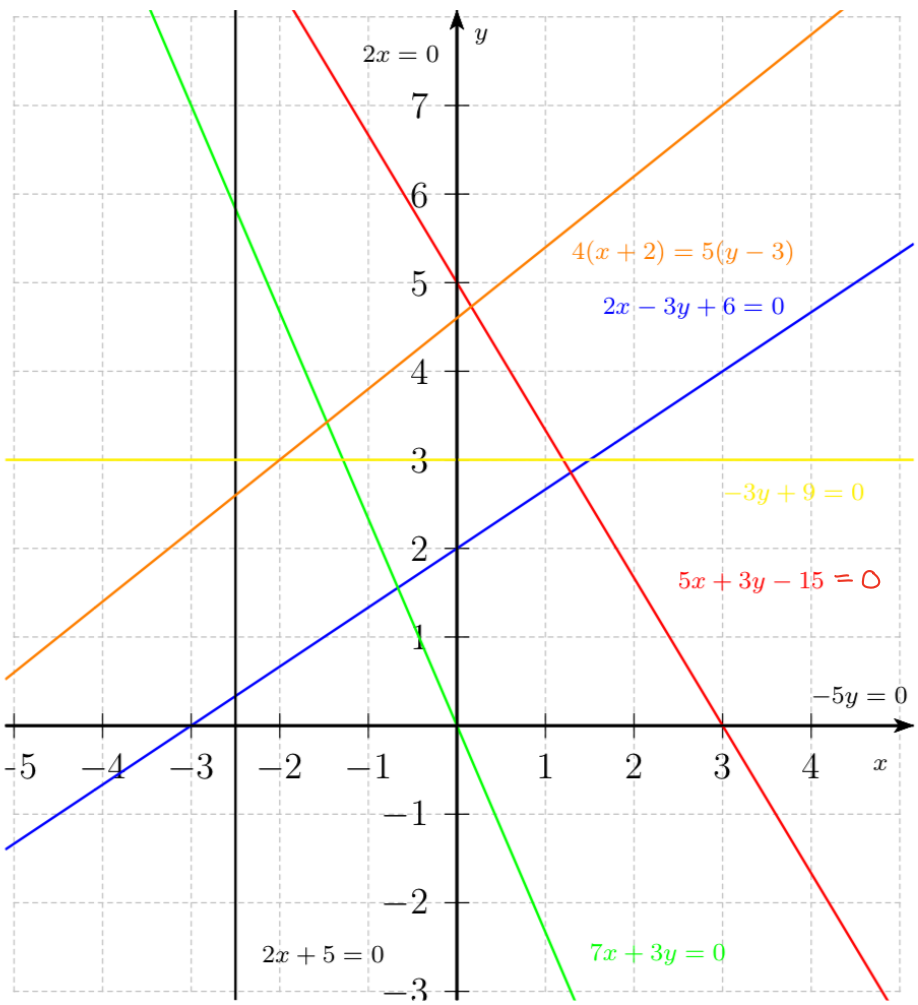
$\Leftrightarrow 4x-5y-23=0$

$\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x-\frac{23}{5}$

par testonement passe par : $4x-5y=23$

$4\cdot 7-5\cdot 1=23$

$\Rightarrow (7;1)$



Ex 3.1.10

$5x+7y-21=0 \iff y=-\frac{5}{7}x+3 \implies m=-\frac{5}{7}$

variantes : $\vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix} \implies m=\frac{d_2}{d_1}=-\frac{5}{7}$

ou $m=-\frac{a}{b}=-\frac{5}{7}$

Ex 3.1.11

$5x-8y+56=0 \iff y=\frac{5}{8}x+7 \implies h=7$

Ex 3.1.12

a) $5x-6y-7=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{5}{6}$

b) $x+y-5=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=-1$

c) $4x-3y=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{4}{3}$

d) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{15}=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=1$

e) $\sqrt{5}x-4y-5=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}4\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{\sqrt{5}}{4}$

f) $3y-8=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad m=0$ (droite horizontale)

g) $x=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=\infty$ (droite verticale)

h) $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{4} \iff 4x+8=5y-15 \iff 4x-5y+23=0$

$\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{4}{5}$

Ex 3.1.13

a) $3x+2y-11=0$

b) $6x+4y=22 \Leftrightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2k \\ y = 1-3k \end{cases} \begin{matrix} \mid 3 \\ \mid 2 \end{matrix} \Rightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

d) $\begin{cases} x = 5-2\ell \\ y = -2+3\ell \end{cases} \begin{matrix} \mid 3 \\ \mid 2 \end{matrix} \Rightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

e) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \Leftrightarrow 2y = -3x+11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

f) $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+8}{3} \Leftrightarrow 3(x-9) = -2(y+8) \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

Les équations sont toutes équivalentes, il s'agit bien de la même droite.

Ex 3.1.14

a) $d : 7x-6y=7 \Leftrightarrow 7x-6y-7=0$

On cherche une droite $d' : ax+by+c=0$ avec la même pente ou le même vecteur directeur $\Rightarrow a=7$ et $b=-6$

$d' : 7x-6y+c=0$

$A(1;1) \in d' \Rightarrow 7-6+c=0 \Leftrightarrow c=-1$ } $d' : 7x-6y-1=0$

b) $d : 5x=5-2y \Leftrightarrow 5x+2y-5=0$

$\Rightarrow d' : 5x+2y+c=0$

$A(-2;-1) \in d' : -10-2+c=0 \Leftrightarrow c=12$ } $d' : 5x+2y+12=0$

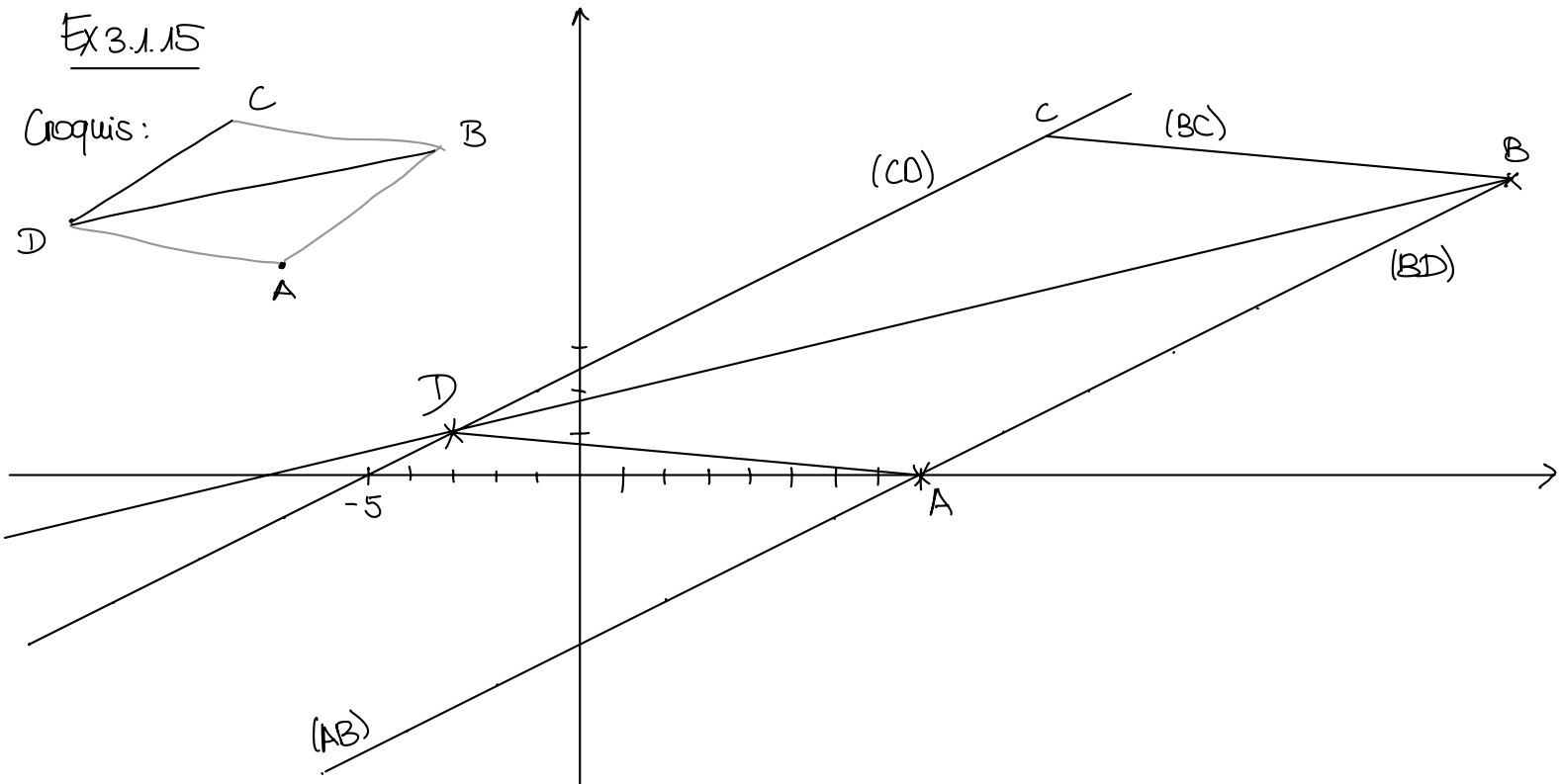
c) $d : y=9-7x \Leftrightarrow 7x+y-9=0$

$\Rightarrow d' : 7x+y+c=0$

$A(2;-2) \in d' \Rightarrow 14-2+c=0 \Leftrightarrow c=-12$ } $d' : 7x+y-12=0$

Ex 3.1.15

Croquis :



(CD) : $x - 2y + 5 = 0$ $\quad m = \frac{1}{2}$

si $y = 0 \Rightarrow x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$

(BD) : $6x - 25y + 43 = 0$ $\quad m = \frac{6}{25}$

passe par D (voir ci-dessous)

1) $D = (CD) \cap (BD)$:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 6x - 25y = -43 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 25 \\ \cdot (-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 25x - 50y = -125 \\ + \quad -12x + 50y = 86 \\ \hline 13x = -39 \\ x = -3 \end{array}$$

(1e)

$\Rightarrow -3 - 2y = -5 \Leftrightarrow -2y = -2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow D(-3;1)$

2) (AB) est // à (CD) $\Rightarrow x - 2y + c = 0$

$A(8;0) \in (AB)$: $8 - 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$

$\Rightarrow$ (AB) : $x - 2y - 8 = 0$

3) (AD) a comme vecteur directeur $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -3-8 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 11$

$\Rightarrow$ (AD) : $x + 11y + c = 0$

$A(8;0) \in (AD)$: $8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$

$\Rightarrow$ (AD) : $x + 11y - 8 = 0$

4) $B = (AB) \cap (BD)$:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 6x - 25y = -43 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 25 \\ \cdot (-2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 25x - 50y & = & 200 \\ + \quad -12x + 50y & = & 86 \\ \hline 13x & = & 286 \\ x & = & 22 \end{array}$$

(1e)

$\Rightarrow \quad 22 - 2y = 8 \iff -2y = -14 \iff y = 7 \Rightarrow B(22;7)$

5) $(BC) \,//\, (AD) \Rightarrow x + My + c = 0$

$B(22;7) \in (AD)$: $\quad 22 + 77 + c = 0 \iff c = -99$

$\Rightarrow (BC) : x + My - 99 = 0$

Ex 3.1.16

a) $d_1 \parallel Ox$ passant par $A(2;2)$: $\underline{d_1 : y = 2}$

b) $d_2 \parallel Oy$ " " $B(6;-4)$: $\underline{d_2 : x = 6}$

c) M milieu de AB : $M\left(\frac{2+6}{2} ; \frac{2-4}{2}\right) = M(4;-1)$

d_3 passe par $P(1;2)$ et M : $\vec{PM} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $a = 1$ et $b = 1$ $\Rightarrow$ $d_3 : x + y + c = 0$

$P \in d_3$: $1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$

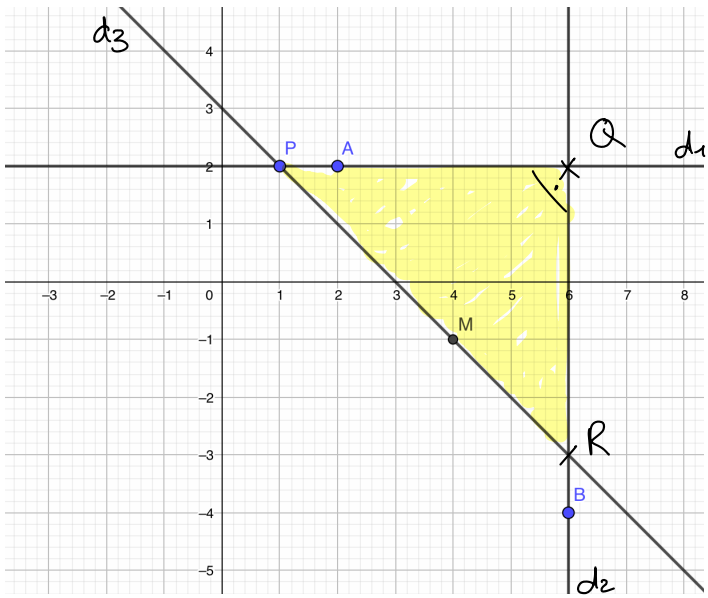
$\Rightarrow$ $\underline{d_3 : x + y - 3 = 0}$

d) $P = d_1 \cap d_3$ car $P(1;2) \in d_1$ ($y = 2$)

$Q = d_1 \cap d_2 \Rightarrow Q(6;2)$ ($d_2 : x = 6$, $d_1 : y = 2$)

$R = d_2 \cap d_3$: $\begin{cases} x = 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 6 + y = 3$

$\Rightarrow y = 3 - 6 = -3 \Rightarrow R(6;-3)$



$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{PQ}\| = \sqrt{25+0} = 5$

$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{RQ}\| = 5$

$\Rightarrow$ aire $= \frac{5 \cdot 5}{2} = \underline{12{,}5\ u^2}$ (car $\triangle$ rectangle)

ou avec formule aire $= \frac{1}{2}\left|5 \cdot 5 - 0 \cdot 0\right| = 12{,}5\ u^2$

(formulaire p.48)

Ex 3.1.17 $A(2;-3)$

a) $d: 3x-7y+3=0$

$p \perp d \Rightarrow 7x+3y+k=0$

$A \in p \Rightarrow 14-9+k=0 \Leftrightarrow k=-5$

$\Rightarrow p: 7x+3y-5=0$

b) $d: x+9y=11$ et $A(2;-3)$

$p \perp d \Rightarrow 9x-y+k=0$

$A \in p \Rightarrow 18+3+k=0 \Leftrightarrow k=-21$

$\Rightarrow p: 9x-y-21=0$

c) $d: 16x=24y-7 \Leftrightarrow 16x-24y+7=0$

$p \perp d \Rightarrow 24x+16y+k=0$

$A \in p \Rightarrow 48-48+k=0 \Leftrightarrow k=0$

$\Rightarrow p: 16x-24y=0$

$2x-3y=0$

d) $d: 2x+3=0$ droite verticale : $x=-\frac{3}{2}$

$p \perp d \Rightarrow y=k$

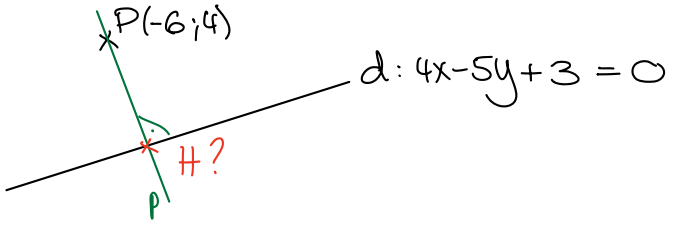
$A \in p \Rightarrow y=-3 \Rightarrow p: y+3=0$

e) $d: 3y=1$ droite horizontale : $y=\frac{1}{3}$

$p \perp d \Rightarrow x=k$

$A \in p \Rightarrow x=2 \Rightarrow p: x-2=0$

Ex 3.1.18



- $p \perp d \Rightarrow p: 5x+4y+c=0$

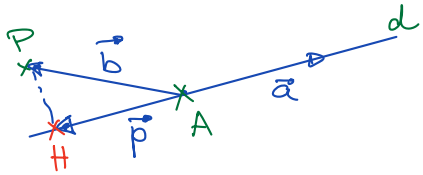
  $P \in p \Rightarrow -30+16+c=0 \Leftrightarrow c=14 \Rightarrow p: 5x+4y+14=0$

- $H = p \cap d$: $\begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 5x+4y=-14 \end{cases} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 41x=-82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ $H(-2;-1)$

Variante : avec formule : projection orthogonale $\vec{p}$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$$



Ici $\vec{a} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{AP}$

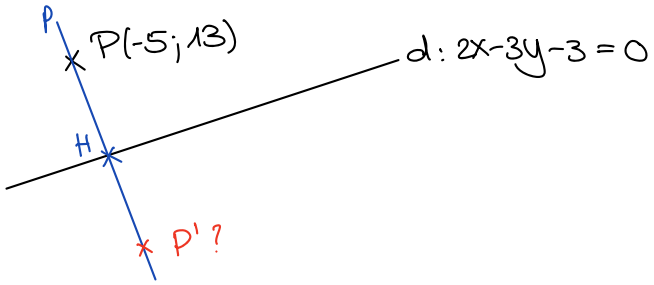
Il faut trouver un pt $A \in d$: $A(3;3)$ car $4 \cdot 3 - 5 \cdot 3 + 3 = 0$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{AP} = \begin{pmatrix} -6-3 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{p} = \frac{5 \cdot (-9) + 4 \cdot 1}{25+16} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-41}{41} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OH} = \vec{OA} + \underbrace{\vec{AH}}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-2;-1)$

Ex 3.1.19



- $p \perp d \Rightarrow 3x+2y+c=0$

  $P \in p \Rightarrow -15+26+c=0 \Leftrightarrow c=-11$

  $\Rightarrow p: 3x+2y-11=0$

- $H = p \cap d : \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \begin{matrix} \mid 2 \\ \mid 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 13x=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 6-3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow y=1$

  $\Rightarrow H(3;1)$

- $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OH} + \underbrace{\overrightarrow{HP'}}_{=\overrightarrow{PH}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+5 \\ 1-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P'(11;-11)}$

  variante 1 : $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+5 \\ 1-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=8 \\ y-1=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-11 \end{cases}$

  variante 2 : H milieu de PP' $\Rightarrow \left(\frac{-5+x}{2} ; \frac{13+y}{2}\right) = (3;1)$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} -5+x=6 \\ 13+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=11 \\ y=-11 \end{matrix}$

Ex 3.1.20

$A(2;-2) \quad B(-1;-1) \quad C(3;2)$

$h_A : \perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_A}$

$\Rightarrow h_A : 4x+3y+c=0$

$A \in h_A \Rightarrow 8-6+c=0$

$c=-2$

$\Rightarrow \underline{h_A : 4x+3y-2=0}$

h_B : $\perp (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_B}$

$\Rightarrow h_B : x+4y+c=0$

$B \in h_B \Rightarrow -1-4+c=0$

$c=5$

$\Rightarrow h_B : x+4y+5=0$

h_C : $\perp (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_C}$

$\Rightarrow h_C : -3x+y+c=0$

$C \in h_C \Rightarrow -9+2+c=0$

$c=7$

$\Rightarrow h_C : -3x+y+7=0$

$H = h_B \cap h_C$: $\begin{cases} x+4y=-5 \\ -3x+y=-7 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$+ \quad x+4y=-5$

$12x-4y=28$

$13x = 23$

$x = \frac{23}{13}$

$+ \quad 3x+12y=-15$

$-3x+y=-7$

$13y=-22$

$y=-\frac{22}{13}$

$\Rightarrow H\left(\frac{23}{13}; \frac{-22}{13}\right)$

Ex 3.1.21

$A(2;-3) \quad B(-5;-2)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$ car $AB \perp m_{AB}$

$\Rightarrow m_{AB} : -7x+y+c=0$

M milieu de AB : $M\left(\frac{2-5}{2}; \frac{-3-2}{2}\right) = M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

$M \in m_{AB} \Rightarrow +7 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow 8+c=0 \Leftrightarrow c=-8$

$\Rightarrow m_{AB} : -7x+y-8=0$

Ex 3.1.22

$A(1;8) \quad B(3;4) \quad C(-6;1)$

$m_{AB} : \perp (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_{AB} : x - 2y + C = 0$

$M_{AB}\left(\frac{1+3}{2}; \frac{8+4}{2}\right) = M_{AB}(2;6) \in m_{AB} \Rightarrow 2 - 12 + C = 0 \Rightarrow C = 10$

$\Rightarrow m_{AB} : x - 2y + 10 = 0$

$m_{BC} : \perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{BC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_{BC} : 3x + y + C = 0$

$M_{BC}\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \in m_{BC} \Rightarrow -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + C = 0 \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow m_{BC} : 3x + y + 2 = 0$

$m_{AC} : \perp (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_{AC} : x + y + C = 0$

$M_{AC}\left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right) \in m_{AC} \Rightarrow -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -2$

$\Rightarrow m_{AC} : x + y - 2 = 0$

$K = m_{AB} \cap m_{BC} : \begin{cases} x - 2y = -10 \mid \cdot 1 \\ 3x + y = -2 \mid \cdot 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 2y = -10 \\ 6x + 2y = -4 \\ \hline 7x = -14 \\ x = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot (-2) + y = -2 \\ -6 + y = -2 \\ y = 4 \end{array} \Rightarrow K(-2;4)$

$r = \| \overrightarrow{AK} \| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 16} = 5u$

Ex 3.1.23

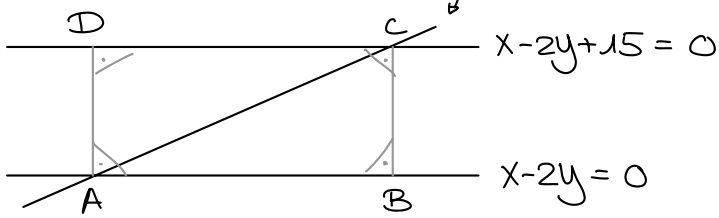
$x = 2y \iff x - 2y = 0$

$2y - x = 15 \iff x - 2y + 15 = 0$

} droites $\parallel \Rightarrow$ côtés

$7x + y - 15 = 0 \Rightarrow$ diagonale (AC)

croquis :



1) $A = (AB) \cap (AC)$:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 7x + y = 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vert\, 1 \\ \vert\, 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ 14x + 2y = 30 \end{matrix}$$

$$15x = 30$$

$$x = 2$$

$\Rightarrow 7 \cdot 2 + y = 15$

$y = 1 \Rightarrow \underline{A(2;1)}$

2) $\{C\} = (DC) \cap (AC)$:

$$\begin{cases} x - 2y = -15 \\ 7x + y = 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vert\, 1 \\ \vert\, 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - 2y = -15 \\ 14x + 2y = 30 \end{matrix}$$

$$15x = 15$$

$$x = 1$$

$\Rightarrow 7 + y = 15$

$y = 8 \Rightarrow \underline{C(1;8)}$

3) $(AD) \perp (AB) \Rightarrow (AD): \; 2x + y + c = 0$

$A \in (AD) \Rightarrow 4 + 1 + c = 0$

$c = -5$

} $\Rightarrow (AD): \; 2x + y - 5 = 0$

$\{D\} = (AD) \cap (DC)$:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = -15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vert\, 2 \\ \vert\, 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x + 2y = 10 \\ x - 2y = -15 \end{matrix}$$

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

$\Rightarrow -2 + y = 5$

$y = 7 \Rightarrow \underline{D(-1;7)}$

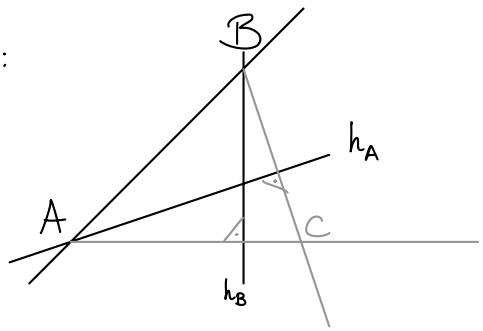
4) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$ ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD est un //-gramme)

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+1 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $B(4;2)$

Ex 3.1.24

$(AB) : 5x-3y+2=0$ $\quad h_A : 4x-3y+1=0$ $\quad h_B : 7x+2y-22=0$

croquis :



1) $\{A\} = (AB) \cap h_A : \begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \begin{matrix} \mid 1 \\ \mid (-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5x-3y=-2 \\ -4x+3y=1 \end{matrix}$

$x = -1$

$\Rightarrow \quad -5-3y=-2$

$-3y=3$

$y=-1 \quad \Rightarrow$ $A(-1;-1)$

$(AC) \perp h_B \Rightarrow 2x-7y+k=0$

$A \in (AC) \Rightarrow 2\cdot(-1)-7(-1)+k=0 \Leftrightarrow -2+7+k=0$

$\Leftrightarrow k=-5$

$\Rightarrow (AC) : 2x-7y-5=0$

2) $\{B\} = (AB) \cap h_B$: $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 2y = 22 \end{cases} \begin{matrix} \\ \mid 3 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} 10x - 6y = -4 \\ 21x + 6y = 66 \end{matrix}$

$31x = 62$

$x = 2$

$\Rightarrow$ $10 - 3y = -2$

$-3y = -12$

$y = 4$ $\Rightarrow$ $B(2;4)$

$(BC) \perp h_A \Rightarrow (BC): 3x + 4y + c = 0$

$B \in (BC) \Rightarrow 6 + 16 + c = 0$

$c = -22$

$\Rightarrow$ $(BC): 3x + 4y - 22 = 0$

3) $\{C\} = (BC) \cap (AC)$: $\begin{cases} 3x + 4y = 22 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot 4 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $+ \begin{matrix} 21x + 28y = 154 \\ 8x - 28y = 20 \end{matrix}$

$29x = 174$

$x = 6$

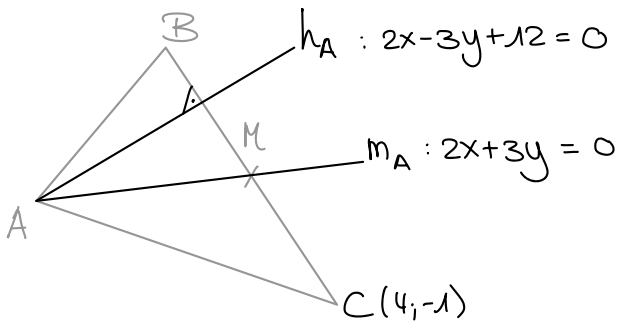
$\Rightarrow$ $18 + 4y = 22$

$4y = 4$

$y = 1$ $\Rightarrow$ $C(6;1)$

Ex 3.1.25

croquis :



1) $(BC) \perp h_A \Rightarrow (BC): 3x + 2y + c = 0$

$C \in (BC) \Rightarrow 12 - 2 + c = 0$

$c = -10$

$\Rightarrow$ $(BC): 3x + 2y - 10 = 0$

2) $\{A\} = h_A \cap m_A : \begin{cases} 2x-3y = -12 \\ 2x+3y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

$$4x = -12$$
$$x = -3 \Rightarrow -6+3y = 0$$
$$y = 2 \Rightarrow A(-3;2)$$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{d} \Rightarrow (AC) : -3x-7y+c = 0$

$C \in (AC) \Rightarrow -12+7+c = 0 \Leftrightarrow c = 5$

$\Rightarrow (AC) : -3x-7y+5 = 0$

$\Leftrightarrow 3x+7y-5 = 0$

3) M milieu de BC : $m_A \cap (BC) : \begin{cases} 2x+3y = 0 \\ 3x+2y = 10 \end{cases} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -4x-6y = 0 \\ 9x+6y = 30 \end{matrix}$$
$$5x = 30$$
$$x = 6 \Rightarrow 12+3y = 0 \Leftrightarrow y = -4 \Rightarrow M(6;-4)$$

$\Rightarrow M(6;-4) = \left(\frac{b_1+4}{2} ; \frac{b_2-1}{2}\right)$ avec $B(b_1;b_2) \Rightarrow B(8;-7)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB) : -9x-11y+c = 0$

$A \in (AB) \Rightarrow 27-22+c = 0$

$c = -5$

$\Rightarrow (AB) : -9x-11y-5 = 0$

$\Leftrightarrow 9x+11y+5 = 0$

Ex 3.1.27

a) $d_1 : 3x - 5y + 7 = 0$ $\qquad$ $d_2 : 2x - 4y - 8 = 0$

$m_1 = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5} \neq m_2 = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ les droites sont concourantes ou sécantes

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -7 & | \cdot 4 \\ 2x - 4y = 8 & | \cdot (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 12x - 20y = -28 \\ -10x + 20y = -40 \\ \hline 2x = -68 \\ x = -34 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (-34) - 4y = 8 \quad -4y = 76 \quad y = -19$$

$\Rightarrow I(-34 ; -19)$

b) $d_1 : -4x + 20y + 36 = 0$ $\quad | \div (-4)$ $\qquad$ $d_2 : x - 5y = 9$

$\Leftrightarrow 20y = 4x - 36$ $\qquad$ $x - 9 = 5y$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$

$m_1 = m_2 = \frac{1}{5}$ et $h_1 = h_2 = -\frac{9}{5}$ $\Rightarrow$ les droites sont confondues (c'est la même droite !)

c) $d_1 : -7x - 8y + 2 = 0$ $\qquad$ $d_2 = 4x - 3y + 4 = 0$

$m_1 = -\frac{-7}{-8} = -\frac{7}{8} \neq m_2 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ les droites sont sécantes

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x - 8y = -2 & | \cdot 3 \\ 4x - 3y = -4 & | \cdot (-8) \end{cases} \quad | \cdot 4 \quad | \cdot 7$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -21x - 24y = -6 \\ -32x + 24y = 32 \\ \hline -53x = 26 \\ x = -\frac{26}{53} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -28x - 32y = -8 \\ 28x - 21y = -28 \\ \hline -53y = -36 \\ y = \frac{36}{53} \end{array}$$

$\Rightarrow I\left(-\frac{26}{53} ; \frac{36}{53}\right)$

d) $d_1 : 8x - 2y + 36 = 0$ $\qquad$ $d_2 : y = 4x + 25$

$\Leftrightarrow \quad -2y = -8x - 36$

$\Leftrightarrow \quad y = 4x + 18$

$m_1 = m_2 = 4$ mais $h_1 = 18 \neq h_2 = 25$

$\Rightarrow$ les droites sont parallèles

Ex 3.1.28

a : $2x+y-3=0$ $\qquad$ b : $x-3y+1=0$ $\qquad$ c : $3x+5y-7=0$ $\qquad$ d : $4x-5y-1=0$

$m_a = -2$ $\qquad$ $m_b = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $m_c = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $m_d = \frac{4}{5}$

Comme les pentes sont toutes différentes $\Rightarrow$ les 4 droites sont sécantes.

a ∩ b : $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ x-3y=-1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x = 8 \\ -7y = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8/7 \\ y = 5/7 \end{array}\right. \Rightarrow I\left(\frac{8}{7} ; \frac{5}{7}\right)$

Il suffit de prouver maintenant que $I \in c$ et $I \in d$:

$3 \cdot \frac{8}{7} + 5 \cdot \frac{5}{7} - 7 = \frac{49}{7} - 7 = 0$ ✓ $\Rightarrow I \in c$

$4 \cdot \frac{8}{7} - 5 \cdot \frac{5}{7} - 1 = \frac{7}{7} - 1 = 0$ ✓ $\Rightarrow I \in d$ $\qquad$ #

Ex 3.1.29

$d_1 : (a-1)x + (3a-1)y + (4a-4) = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{a-1}{3a-1}x - \frac{4a-4}{3a-1} \Rightarrow m_1 = -\frac{a-1}{3a-1}$ et $h_1 = -\frac{4a-4}{3a-1}$ avec $a \neq \frac{1}{3}$

$d_2 : (2a-2)x + (2a-1)y + (4a-7) = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{2a-2}{2a-1}x - \frac{4a-7}{2a-1} \Rightarrow m_2 = -\frac{2a-2}{2a-1}$ et $h_2 = -\frac{4a-7}{2a-1}$ avec $a \neq \frac{1}{2}$

- si $a \neq \frac{1}{3}$ et $a \neq \frac{1}{2}$

a) confondues si $m_1 = m_2$ et $h_1 = h_2$

$-\frac{a-1}{3a-1} = -\frac{2a-2}{2a-1}$ et $-\frac{4a-4}{3a-1} = -\frac{4a-7}{2a-1}$

$(a-1)(2a-1) = (3a-1)(2a-2)$

$2a^2-3a+1 = 6a^2-8a+2$

$4a^2-5a+1 = 0$

$a = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

$(4a-4)(2a-1) = (4a-7)(3a-1)$

$8a^2-12a+4 = 12a^2-25a+7$

$4a^2-13a+3 = 0$

$a = \frac{13 \pm 11}{8} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

b) parallèles si $m_1 = m_2 \Rightarrow a = 1$

c) perpendiculaires si $m_1 \cdot m_2 = -1$:

$+\frac{a-1}{3a-1} \cdot \left(+\frac{2a-2}{2a-1}\right) = -1 \Leftrightarrow (a-1)(2a-2) = -(3a-1)(2a-1)$

$\Leftrightarrow 2a^2-4a+2 = -6a^2+5a-1$

$\Leftrightarrow 8a^2-9a+3 = 0 \quad \Delta = -15 < 0$

$\Rightarrow d_1 \not\perp d_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- Si $a = \frac{1}{3}$: d_1 est vertical mais pas $d_2 \Rightarrow$ ni confondues si parallèles ni perp. car d_2 n'est pas horiz.
- Si $a = \frac{1}{2}$: d_2 est vertical mais pas $d_1 \Rightarrow$ " " " " car d_1 n'est pas horiz.

Ex 3.1.20 (ancienne version)

$$A(2;1) \quad B(-1;-1) \quad C(3;2)$$

h_A : $\perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_A}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h_A : 4x+3y+c = 0 \\ A \in h_A \Rightarrow 8+3+c = 0 \\ \qquad\qquad c = -11 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{h_A : 4x+3y-11 = 0}$$

h_C : $\perp (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_C}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h_C : -3x-2y+c = 0 \\ C \in h_C \Rightarrow -9-4+c = 0 \\ \qquad\qquad c = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{h_C : -3x-2y+13 = 0}$$

h_B : $\perp (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_B}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h_B : x+y+c = 0 \\ B \in h_B \Rightarrow -1-1+c = 0 \\ \qquad\qquad c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{h_B : x+y+2 = 0}$$

$H = h_A \cap h_C$: $\left\{\begin{array}{l} 4x+3y = 11 \\ -3x-2y = -13 \end{array}\right. \begin{array}{|l} 2 \\ 3 \end{array}$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 8x+6y = 22 \\ -9x-6y = -39 \\ \hline -x \quad = -17 \end{array}$$

$$x = 17$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 17 + 3y = 11$$

$$78 + 3y = 11$$

$$y = -19 \Rightarrow \underline{H(17;-19)}$$