

Ch1 Algèbre

1.1. Puissances

Déf: la puissance n^e de a est

$$\begin{array}{c} \text{base} \nearrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}} \nwarrow \text{exposant} \end{array}$$

valable si $n \in \mathbb{N}^*$

Propriétés

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$3) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemples

$$1) 5^2 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ fois}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ fois}} = 5^5$$

$$2) (7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$$

$$3) (2a)^3 = 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8 \cdot a^3$$

mais $(2+a)^3 = (2+a)(2+a)(2+a)$

$$= 8 + 3 \cdot 2 \cdot a^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot a + a^3$$

$$= 8 + 6a^2 + 12a + a^3$$

$$\neq 8 + a^3$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$4) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$5) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ avec } n > m$$

$$5) \frac{x^5}{x^2} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x^3$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} \text{ avec } m > n$$

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$$

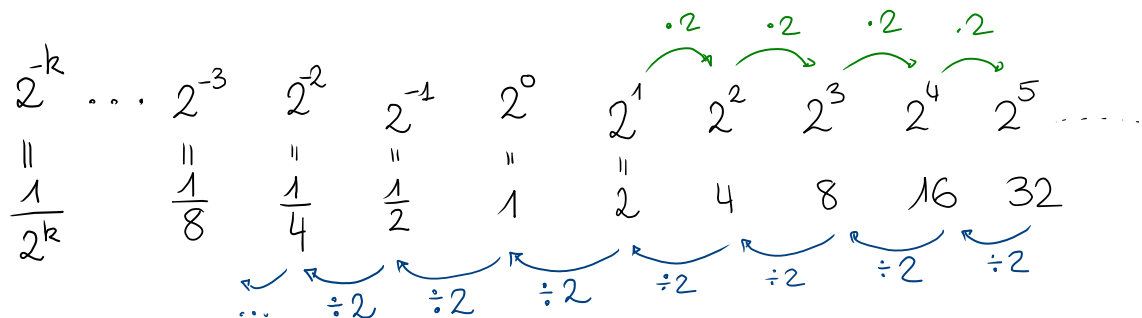
Rem : si a est négatif a^n est $\begin{cases} \text{positif si } n \text{ est pair} \\ \text{négatif si } n \text{ est impair} \end{cases}$

exple : $(-3)^2 = 9$

$$(-3)^3 = -27$$

$$-3^2 = -9$$

Étendons la définition, si $n \leq 0$



$\Rightarrow$

$$a^0 = 1 \quad \text{avec } a \neq 0$$



$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad \text{" " " et } k \in \mathbb{Z}$$

Exemples :

$$1) \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$2) \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$-3^{-2} = \frac{1}{-3^2} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$$

$$3) \quad \frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 1 \div \frac{1}{3^2} = 1 \cdot 3^2 = 9$$

Propriété :

$$\frac{1}{a^{-k}} = a^k \quad a \neq 0$$

$$4) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{2^3} \div \frac{1}{3^3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3^3}{1} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Propriété :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{b^k}{a^k} \quad a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

$$5) \quad 2^{-5} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{10} = 2^{-5-1+10} = 2^4 = 16$$

$$6) \quad (4^{-3})^{-2} = 4^{(-3)(-2)} = 4^6 = 4'096$$

$$7) \quad \frac{3^5}{3^{-2}} \cdot \frac{3^4}{1} \cdot \frac{1}{3^9} = 3^{5-(-2)} \cdot 3^4 \cdot 3^{-9} = 3^{7+4-9} = 3^2 = 9$$

ou

$$= \frac{3^{5+4} \cdot 1}{3^{-2+9} \cdot 1} = \frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$$

ex 1.1.1 / 2 / 3 / 5 → h)

Exple(suite)

$$8) (3x^{-2}y^3)^{-1} = 3^{-1}x^2y^{-3} = \frac{x^2}{3y^3}$$

$$9) \frac{2^2 \cancel{x^3} y^{-5}}{2^{-3} \cancel{x^3} y^{-6}} = 2^{2-(-3)} \cdot y^{-5-(-6)} = 2^5 \cdot y = 32y$$

$$10) \left(\frac{x^{-3}}{2y^3} \right)^{-2} = \left(\frac{2y^3}{x^{-3}} \right)^2 = \frac{4y^6}{x^{-6}} = 4x^6y^6$$
$$= \frac{x^6}{(2y^3)^{-2}} = x^6 \cdot (2y^3)^2 = 4x^6y^6$$

$$11) (3x^2y^{-5}z)^4 = 81x^8y^{-20}z^4 = \frac{81x^8z^4}{y^{20}}$$

$$12) \left(\frac{8x^2}{3y} \right)^3 \div \left(\frac{2x}{9y^2} \right)^4 = \frac{8^3 \cancel{x^6}}{3^3 \cancel{y^3}} \div \frac{2^4 \cancel{x^4}}{9^4 \cancel{y^8}} = \frac{8^3 \cancel{x^6}}{3^3 \cancel{y^3}} \cdot \frac{9^4 \cancel{y^8}}{2^4 \cancel{x^4}} = \frac{2^5 \cdot \cancel{2^3}^3 \cdot x^2}{\cancel{3^3}^3} \cdot \frac{\cancel{3^8}^4 \cdot y^5}{\cancel{2^4}^4} = 2^5 \cdot 3^5 \cdot x^2 y^5 = \underline{6^5 x^2 y^5}$$

ex 1.1.6