

Étude de fonction trigonométrique

Nom Prénom :

Durée : 30 min. Calculatrice et formulaire autorisés.

Indiquer le détail des calculs et/ou du raisonnement.

Exercice

Étudier la fonction suivante périodique de période π sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.

$$f(x) = 2 \sin(2x) - 1$$

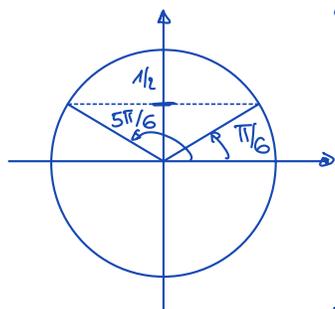
1) ED(f) = \mathbb{R}

2) zéros : $2 \sin(2x) - 1 = 0$

$$2 \sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

msc. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$



$$\Rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \\ \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

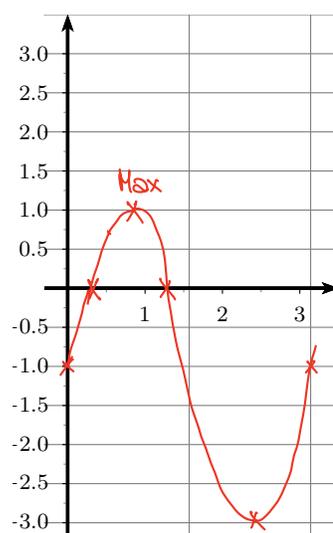
\Rightarrow sur I : $x = \frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$

signe :

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	π
$\text{sgn}(f)$	-	0	+	-

$f(0) = -1$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0,7$ $f(\pi) = -1$

4) graphe :



3) dérivée : $f'(x) = 2 \cos(2x) \cdot 2 = 4 \cos(2x)$

zéros de f' : $4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \\ -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow sur I : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

croissance

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\text{sgn}(f')$	+	0	-	+
$\text{croiss}(f)$		↗ Max	↘ min	

$f'(0) = 4$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ $f'(\pi) = 4$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow$ Max $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow$ min $\left(\frac{3\pi}{4}; -3\right)$