Règles de dérivation

1. $\boxed{(e^x)' = e^x}$ et plus généralement : $\boxed{(e^u)' = e^u \cdot u'}$

2. $\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$ et plus généralement : $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$

Exemples :
Déterminer l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{4x}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\underbrace{e^x}_{>0}}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$ $\quad u = x^2 \quad v = e^x$ $\quad u' = 2x \quad v' = e^x$

$f'(x) = \dfrac{2xe^x - x^2e^x}{\underbrace{(e^x)^2}_{e^{2x}}} = \dfrac{x\cancel{e^x}(2-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$

c) $f(x) = \ln(-3x)$ $\quad$ cond : $-3x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}^*_-$

$u = -3x$
$u' = -3$

$f'(x) = \dfrac{-3}{-3x} = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ $\quad$ cond : $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0$

$3 \quad -2$

$ED(f) =]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$

$u = x^2 - x - 6$
$u' = 2x - 1$

ex 1.1.1 sauf e)
1.1.6 a) b) c)
e) f)
h) i) j) k)

Exemples (suite) :
Déterminer l'ensemble de définition, le signe et la croissance des fonctions suivantes :

e) $f(x) = (x-1)e^{2x}$ $\qquad$ $\underline{ED(f) = \mathbb{R}}$

zéro(s) de f : $(x-1)\underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0$, $x-1 \to 1$

signe :

x		1	
f	$-$	0	$+$

croissance

dérivée : $f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x}$ $\qquad$ $u = x-1$, $u' = 1$ $\qquad$ $v = e^{2x}$, $v' = 2e^{2x}$

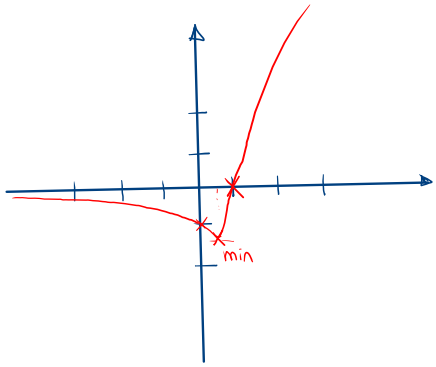
$= e^{2x}[1 + 2(x-1)]$

$= \underbrace{e^{2x}}_{>0}(2x-1)$, $2x-1 \to 1/2$

zéro(s) de f' :

x		$1/2$	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-1)e^{1} = -\frac{1}{2}e \Rightarrow \min(\frac{1}{2}; \underbrace{-\frac{1}{2}e}_{\sim -1{,}36})$



f) $f(x) = x\ln(x) - x$

$\underline{ED(f) = \mathbb{R}_+^*}$

zéro(s) de f : $x\ln(x) - x = 0$

$x(\ln(x) - 1) = 0$

$x \to 0 \notin ED(f)$; $\ln(x) - 1 = 0$, $\ln(x) = 1$, $x = e$

signe

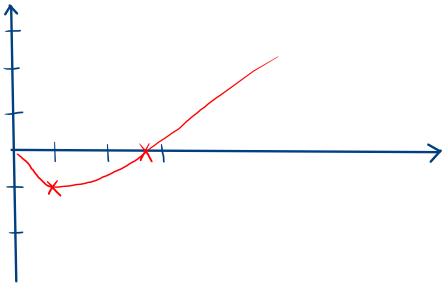
x		0		e	
f			$-$	0	$+$

$f(1) < 0$ $\qquad$ $f(3)$

croissance $\qquad f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - 1 = \ln(x)$

zéro de f' : $\ln(x) = 0$, $x = 1$

$f'(0{,}5) < 0$ $\qquad$ $f'(2) > 0$

x		0		1	
f'			$-$	0	$+$
f			$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = -1 \Rightarrow \min(1; -1)$