Exponentielles et logarithmes

1. Rappels

Définition 1.
Le **logarithme** en base a d'un nombre u, est la puissance à laquelle on élève a pour obtenir u avec a et u des nombres positifs, non nuls et a différent de 1. On le note $\log_a(u)$.
Autrement dit :

$$\boxed{\log_a(u) = x \Leftrightarrow a^x = u \qquad \text{avec } u \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}}$$

Convention d'écriture : $\log_{10}(u) = \log(u)$ et $\log_e(u) = \ln(u)$

Exemples :

a) $\log_2(16) = 4$

b) $\log(100) = 2$

c) $\ln(e^2) = 2$

d) $\log_{12}(1) = 0$

e) $\log_9(3) = \frac{1}{2}$ car $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$

f) $\log_5(\frac{1}{625}) = -4$ car $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

Propriétés :

1. $\log_a(a^x) = x$
2. $a^{\log_a(u)} = u$
3. $\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$
4. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
5. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$
6. $\log_a(u) = \log_a(v) \Leftrightarrow u = v$

Formule du changement de base : $\log_a(u) = \dfrac{\log(u)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$

Équations exponentielles

On essaie d'isoler l'exponentielle pour appliquer $\log_a$ des deux côtés de l'équation et la propriété 1.

Exemple : $e^{x+1} - 5 = 0 \iff$

$$e^{x+1} = 5 \quad | \ln(\ )$$
$$x+1 = \ln(5)$$
$$x = \ln(5) - 1 \quad \Rightarrow S = \{\ln(5) - 1\}$$

Équations logarithmiques

On essaie d'isoler le logarithme pour appliquer $\exp_a$ des deux côtés de l'équation et la propriété 2. Les propriétés 3, 4 et 5 sont parfois utiles pour y arriver.
⚠ Il faut ensuite vérifier les solutions obtenues dans l'équation de départ car $\log_a(u)$ est défini que si $u > 0$.

Exemples :

a) $\log_2(x^2 - 3) = 0 \quad | \, 2^{(\ )}$

$x^2 - 3 = 2^0 = 1$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$ ⚠

vérif : $x = 2$: $\log_2(2^2-3) = \log_2(1) = 0$ ✓

$x = -2$: $\log_2((-2)^2-3) = $ " " ✓

$\Rightarrow S = \{\pm 2\}$

b) $2\ln(7x - 3) - 1 = 4$

$2\ln(7x-3) = 5$

$\ln(7x-3) = \frac{5}{2} \quad | \, e^{(\ )}$

$7x - 3 = e^{5/2}$

$7x = e^{5/2} + 3$

$x = \frac{e^{5/2}+3}{7} = \frac{\sqrt{e^5}+3}{7}$ ⚠

vérif : $2\ln\left(\cancel{7}\cdot\frac{e^{5/2}+3}{\cancel{7}} - 3\right) - 1$

$= 2\ln\left(e^{5/2}\right) - 1$

$= 2\cdot\frac{5}{2} - 1 = 5 - 1 = 4$ ✓

$\Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{e^5}+3}{7}\right\}$

c) $\log(3x - 4) + \log(10x - 4) = 2\log(5x - 2)$

$\log[(3x-4)(10x-4)] = \log[(5x-2)^2] \quad | \, 10^{(\ )}$

$(3x-4)(10x-4) = (5x-2)^2$

$30x^2 - 52x + 16 = 25x^2 - 20x + 4$

$5x^2 - 32x + 12 = 0 \qquad \Delta = 784$

$x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{784}}{10} = \begin{cases} 6 \\ 2/5 \end{cases}$ ⚠

vérif :

1) $x = 6$: $\log(14) + \log(56) \overset{?}{=} 2\log(28)$ ✓

2) $x = \frac{2}{5}$: $\log(\underbrace{\tfrac{6}{5} - 4}_{<0})$ ϟ

$\Rightarrow S = \{6\}$

d) $\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right) = 0 \quad | \, e^{(\ )}$

$\frac{x+3}{x+2} = 1$

$x + 3 = x + 2$

$3 = 2$ ϟ

$\Rightarrow S = \emptyset$