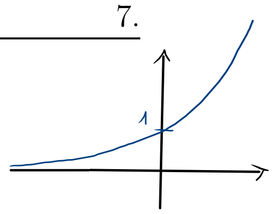
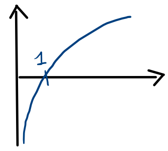
Calcul de limite

AH



$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = "e^{-\infty}" = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = "e^{+\infty}" = +\infty}$

$\boxed{\lim_{x\to 0_+} \ln(x) = "\ln(0_+)" = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = "\ln(+\infty)" = +\infty}$



AV

Lors d'un calcul de limite, en cas d'indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, il n'est pas possible de procéder de la même manière qu'avec des fonctions rationnelles (par factorisation).Dans ce cas la méthode consiste à dériver le numérateur et le dénominateur puis à recalculer cette limite.

C'est la règle de **Bernoulli-L'Hospital** (BH) :
sous réserve des conditions d'existence suivantes :

1. $f(a) = g(a) = 0 \quad (= \infty)$
2. f et g sont dérivables au voisinage de a.
3. g' ne s'annule pas dans ce voisinage. (mais il peut s'annuler en a)

On a

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

⚠ $\neq \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Ce théorème s'applique également aux cas où $x \to \pm\infty$

Exemples :
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = "\frac{0}{0}" \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{e^{x-2}} = \frac{4}{e^0} = \frac{4}{1} = 4$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = "\frac{+\infty}{+\infty}" \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = "\frac{+\infty}{+\infty}" \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = "\frac{+\infty}{+\infty}" \overset{B.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$

ex 1.1.5 a) c) f) h)
1.1.9 ~~b)~~

e) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^3 \ln(x) = \underset{\text{f.i.}}{``0\cdot(-\infty)"} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^3}} = \underset{\text{f.i.}}{``\frac{-\infty}{+\infty}"}$

$\overset{B.H}{=} \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}4}}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{\overset{x^3}{\cancel{x^4}}}{3}\right) = \lim\limits_{x\to 0_+} -\frac{x^3}{3} = 0$

Cas : "$0\cdot\infty$" on essaie de se ramener au cas "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$\frac{0}{0}$" afin de pouvoir utiliser B.H.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \underset{\text{f.i.}}{``-\infty\cdot 0"} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = ``\frac{\infty}{\infty}"$

$\overset{B.H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = ``\frac{1}{-\infty}" = 0$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \underset{B.H.}{\overset{``\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} \underset{B.H.}{\overset{``\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{+\frac{2x}{x^4}} \right.$

$\left. = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{2}{x^3}} \underset{B.H.}{\overset{``\frac{0}{0}"}{=}} \dots \right)$

ex 1.1.5 g) d)

1.1.5 b)