Asymptotes

— Pour la recherche d'**AV**, il faut calculer la limite lorsque $x \to a$ où a est un pôle (valeur interdite se trouvant "dans" ou "au bord" de l'ensemble de définition).

— La recherche d'**AH** doit être effectuée en deux étapes :

  — l'éventuelle AHG à l'aide de la $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

  — l'éventuelle AHD à l'aide de la $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

— Il n'y aura **pas d'AO** à déterminer dans le cadre de ce cours.

Exemples :

a) Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction $f(x) = xe^{x-2}$

$ED(f) = \mathbb{R}$

AV : — vu l'ED(f)

AH : • $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{x-2} = \text{"}-\infty \cdot e^{-\infty}\text{"} = \text{"}\underbrace{-\infty \cdot 0}_{\text{f.i.}}\text{"} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x+2}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}$

$\overset{B.H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x+2}} = \text{"}\frac{1}{-e^{+\infty}}\text{"} = \text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"} = 0 \Rightarrow$ AHG : $y = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{x-2} = \text{"}+\infty \cdot e^{+\infty}\text{"} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ AHD : —

b) Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

$ED(f) =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]0\,;+\infty[$

cond : $x^2 + 2x > 0$

$x(x+2) > 0$

$0 \qquad -2$

x		-2		0	
$sgn(x^2+2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

AV : $\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ <}} \ln(x^2+2x) = \ln(0_+) = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = -2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln(x^2+2x) = \ln(0_+) = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = 0$

AH : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \ln(x^2+2x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(x^2) = \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AHG ni d'AHD

Étude de fonction

L'étude des fonctions exponentielles et logarithmes admet la même marche à suivre que celle des fonctions polynomiales ou rationnelles :

1. ED(f)
2. Signe
3. Asymptotes
4. Croissance
5. Graphe

Exemple :
Étudier la fonction $f(x) = (x-1)e^{2x}$

1. $ED(f) = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 0 \iff (x-1)\underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0 \iff x = 1$

signe

x		1	
$sgn(f)$	$-$	0	$+$

3. AV : /

AH : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{2x} = \overset{f.i.}{``-\infty \cdot 0"} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{-2x}} \underset{B.H.}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\Rightarrow$ AHG : $y = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{2x} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AHD

4. $f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = e^{2x}(1 + 2(x-1)) = \underbrace{e^{2x}}_{>0}(2x-1)$ $\searrow \frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} u = x-1 & v = e^{2x} \\ u' = 1 & v' = 2e^{2x} \end{pmatrix}$

x		$1/2$	
$sgn(f')$	$-$	0	$+$
crssce(f)	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\min\left(\frac{1}{2} ; -\frac{e}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)e^{2\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot e = -\frac{e}{2}$

5.

$f(0) = -1$