Processus exponentiels

Un objet vaut actuellement 100 CHF.
Si sa valeur triple chaque année, quelle sera sa valeur dans 5 ans ?
et dans n année ?

a)
$$\begin{array}{rcll}
v(0) & = & 100 & \\
 & & & \big)\cdot 3 \\
v(1) & = & 300 & \\
 & & & \big)\cdot 3 \\
v(2) & = & 900 & \\
 & & & \big)\cdot 3 \qquad \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \cdot 3^5 \\
v(3) & = & 2'700 & \\
 & & & \big)\cdot 3 \\
v(4) & = & 8'100 & \\
 & & & \big)\cdot 3 \\
v(5) & = & 24'300 & \qquad = 100 \cdot 3^5 \\
 & \vdots & & \\
v(n) & = & 100 \cdot 3^n &
\end{array}$$

Combien d'années faudra-t-il attendre pour que l'objet ait une valeur de plus de 6'000'000 CHF

$$100 \cdot 3^n = 6'000'000$$
$$3^n = 60'000$$
$$n = \log_3(60'000) = \frac{\log(60'000)}{\log(3)} \cong 10{,}01$$

$\Rightarrow$ Au bout de 11 ans l'objet aura une valeur de plus de 6 mio. CHF

Et si la valeur de l'objet triplait chaque 2 ans

$$\begin{array}{llll}
v(0) = 100 & & & \\
 & \big) \cdot 3 & & \\
v(2) = 300 & & = & 100 \cdot 3 \\
 & \big) \cdot 3 & & \\
v(4) = 900 & & = & 100 \cdot 3^2 \\
 & \big) \cdot 3 & & \\
v(6) = 2700 & & = & 100 \cdot 3^3
\end{array}$$

$$\vdots$$

$$v(n) = 100 \cdot 3^{n/2} \quad \Longrightarrow \quad v(5) = 100 \cdot 3^{5/2} \cong 1'558,85 \text{ CHF}$$

$$100 \cdot 3^{n/2} = 6'000'000$$

$$3^{n/2} = 60'000$$

$$\frac{n}{2} = \log_3(60'000)$$

$$n = 2 \cdot \log_3(60'000) \cong 20,02$$

$\Longrightarrow$ 21 ans pour dépasser 6'000'000 CHF

Une fonction du type $\boxed{v(n) = v(0) \cdot a^{n/k}}$

modélise un processus exponentiel,

avec $v(0)$ ou v_0 est la valeur initiale

a est le taux de croissance

k est la fréquence

Ex 1.2.19

N nbre de bactéries t nbre d'heures

a) $N(t) = 10'000 \cdot 2^{t/12}$ avec $N_0 = 10'000$

$a = 2$

$k = 12$

b) $t = 1\text{sem.} = 168\,h$

$N(168) = 10'000 \cdot 2^{168/12} = 10'000 \cdot 2^{14} = \underline{163'840'000 \text{ bactéries}}$

c) $30'000 = 10'000 \cdot 2^{t/12}$

$3 = 2^{t/12} \quad \Big| \log_2(\ )$

$\log_2(3) = \frac{t}{12}$

$t = 12 \cdot \log_2(3) = 12 \frac{\log(3)}{\log(2)} \cong 19{,}02$

Le nbre de bactéries aura triplé après un peu plus de 19h.

Autre exemple

On observe une population de pucerons.
On en compte 80 mais au bout d'une semaine il n'en reste que 60.
Sachant qu'il s'agit d'un processus exponentiel, combien de pucerons
restera-t-il au bout de 2 semaines ?

fréquence : 7 jours

taux de croissance : $a = ?$

$N(0) = 80$

$\big) \cdot a = \frac{3}{4} = \frac{60}{80} = 0{,}75$

$N(7) = 60$

$\big) \cdot \frac{3}{4}$

$N(14) = 45$ pucerons

Et au bout de 20 jours ?

$$N(t) = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{t/7}$$

$$N(20) = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{20/7} \cong 35{,}17 \implies 35 \text{ pucerons}$$

Quand la population ne sera plus que de 10 pucerons ?

$$10 = 80 \cdot 0{,}75^{t/7}$$

$$0{,}125 = 0{,}75^{t/7} \qquad \Big| \log_{0{,}75}$$

$$\log_{0{,}75}(0{,}125) = \frac{t}{7}$$

$$t = 7 \cdot \log_{0{,}75}(0{,}125) = 7 \cdot \frac{\log(0{,}125)}{\log(0{,}75)} \cong 50{,}6$$

$\implies$ au bout de 50 jours

Rem

Si $a > 1$ il s'agit d'une croissance

Si $0 < a < 1$ " " décroissance

ex 1.2.20 et 1.2.21