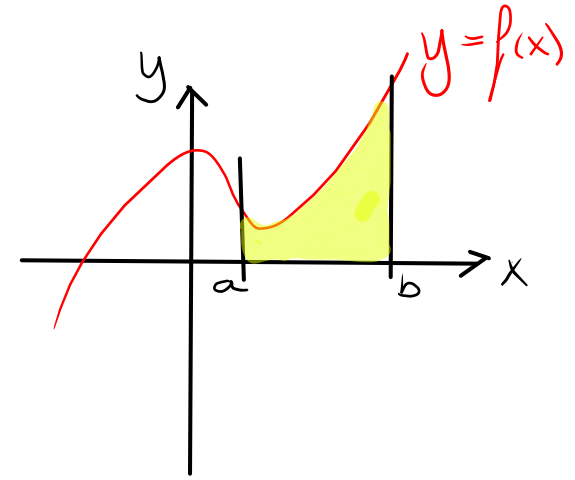


Primitives et intégrales

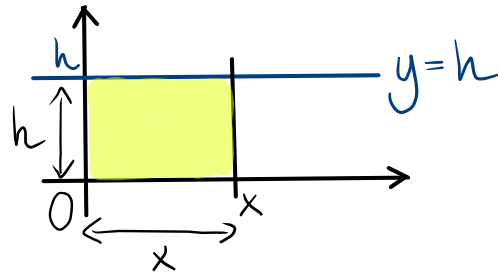
But : Calculer l'aire d'un domaine sous une courbe



Exemples d'intro

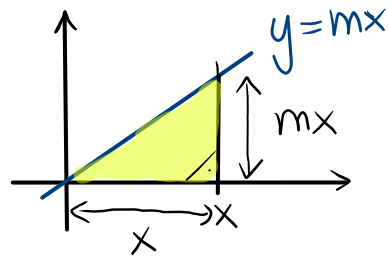
1) $f(x) = h$

$$A = xh = hx$$



2) $f(x) = mx$

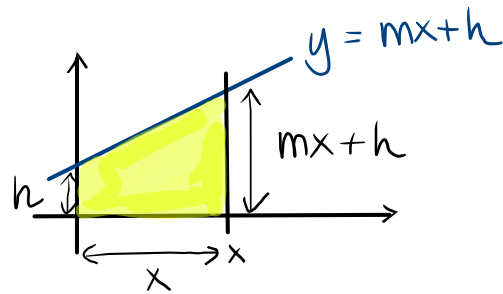
$$A = \frac{1}{2} mx^2$$



3) $f(x) = mx + h$

$$A = \frac{1}{2} (h + mx + h) \cdot x$$

$$= \frac{1}{2} mx^2 + hx$$



Rem : En dérivant l'aire des exemples ci-dessus on obtient les fonctions données.

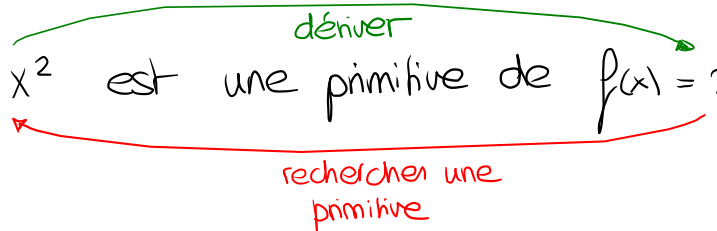
1. Primitives

Oublions pour un moment la notion d'aire et concentrons nous sur le problème suivant :

Soit f une fonction donnée, trouver une fonction F telle que sa dérivée donne f .

Déf: Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ est une primitive de f .

Par exple : la fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$

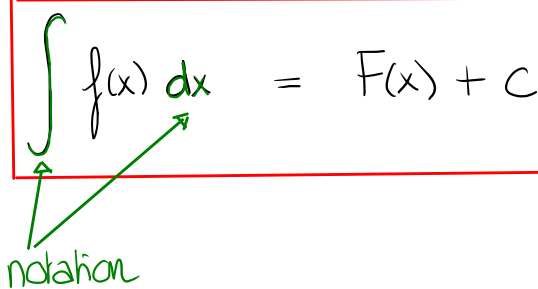


$G(x) = x^2 + 3$ ou $H(x) = x^2 - 5$ sont aussi des primitives de f .

Pour une fonction $f(x)$ donnée, il existe une infinité de primitives, de la forme $F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

Déf: L'ensemble des primitives de f est appelé l'intégrale indéfinie, noté $\int f(x) dx$

On écrit alors


$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Ex 1.3.1

$$a) \quad F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^7}} \quad f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$$

$$F'(x) = \left(-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^7}}\right)'$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^7}}\right)'$$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{\frac{7x^6}{2\sqrt{x^7}}}{(\sqrt{x^7})^2}\right)$$

$$= +2 \cdot \frac{7x^6}{2\sqrt{x^7}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^7})^2} = \frac{7x^6}{\sqrt{x^7} \cdot x^7} = \frac{7}{x\sqrt{x^9}} = \frac{7}{\sqrt{x^2 \cdot x^9}} = \frac{7}{\sqrt{x^{11}}} \neq$$

$$\underline{ou} \quad F'(x) = \left(-2 x^{-\frac{7}{2}}\right)' = -2 \cdot \left(+\frac{7}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}-1} = 7 x^{-\frac{9}{2}} = \frac{7}{\sqrt{x^9}} \neq$$

$$u = \sqrt{x^7}$$

$$u' = \frac{7x^6}{2\sqrt{x^7}}$$

Primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x) + C$
0	$C \quad C \in \mathbb{R}$
k	$kx + C \quad k \in \mathbb{R}$
$n \neq -1, x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$(n = -1) \frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) x^{n+1-1} = x^n \checkmark$$

Exemples :

$$1) \int 5 dx = 5x + C$$

$$\int 5 dt = 5t + C$$

$$2) \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$3) \int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = \frac{1}{-6+1} x^{-6+1} + C = -\frac{1}{5} x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$$

$$4) \int \sqrt[4]{x} dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{\frac{1}{4}+1} x^{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{1}{\frac{5}{4}} x^{\frac{5}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + C$$

Propriétés :

$$1) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx = k \cdot F(x) + C$$

preuve : $(kF(x))' = k \cdot F'(x)$

exple $\int 2x^3 dx = 2 \int x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 + C = \frac{1}{2} x^4 + C$

$$2) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$$

preuve : $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$

exple $\int (2x^3 + 3) dx = \frac{1}{2} x^4 + 3x + C$

3) rappel : $((2x+1)^3)' = 3(2x+1)^2 \cdot \underbrace{2}_{\text{dérivée interne}} = 6(2x+1)^2$

$$\Rightarrow \int 6(2x+1)^2 dx = \int 3(2x+1)^2 \cdot 2 dx = (2x+1)^3 + C$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

preuve : $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

en particulier

$$3a) \int u^n \cdot u' dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

avec u une fonction de x

Exemples

$$1) \int \underbrace{(5x^2+2x+1)^4}_{u^4} \cdot \underbrace{(10x+2)}_{u'} dx = \frac{1}{5} (5x^2+2x+1)^5 + C$$

$$2) \int \frac{4}{\sqrt{4x+2}} dx = \int \underbrace{4}_{u'} \underbrace{(4x+2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{\underbrace{-\frac{1}{2}+1}_{\frac{1}{2}}} (4x+2)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{4x+2} + C$$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{4x+2}} dx = \int \underbrace{(4x+2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}} dx \stackrel{\text{Astuce}}{=} \frac{1}{4} \int 4 \cdot (4x+2)^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$\begin{aligned} u &= 4x+2 \\ u' &= 4 \end{aligned} \quad \stackrel{2)}{=} \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{4x+2} + C$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{4x+2} + C$$

! Rem $\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

$$4) \int 3x(x^2+2)^3 dx = \frac{3}{2} \int 2x(x^2+2)^3 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} (x^2+2)^4 + C$$
$$\begin{aligned} u &= x^2+2 \\ u' &= 2x \end{aligned} \quad = \frac{3}{8} (x^2+2)^4 + C$$

$$\text{vérif: } \left(\frac{3}{8} (x^2+2)^4 \right)' = \frac{3}{\cancel{8}} \cdot \cancel{4}^1 (x^2+2)^3 \cdot 2x$$
$$= 3x(x^2+2)^3 \checkmark$$

$$5) \int \underbrace{(x^2+x+1)}_{u^2} \underbrace{(2x+1)}_{u'} dx = \frac{1}{1+1} (x^2+x+1)^{1+1} + C = \frac{1}{2} (x^2+x+1)^2 + C$$
$$\begin{aligned} u &= x^2+x+1 \\ u' &= 2x+1 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \int \underbrace{(x^2+x+1)(2x+1)}_{2x^3+x^2+2x^2+x+2x+1} dx = \int (2x^3+3x^2+3x+1) dx = \frac{2}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$
$$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

Propriétés (suite)

$$3b) \quad \boxed{\int e^u \cdot u' dx = e^u + c} \quad (u \text{ fonction de } x)$$

exemples :

$$1. \int e^{x+2} dx = e^{x+2} + c$$

$$u = x+2 \\ u' = 1$$

$$2. \frac{1}{3} \int 3e^{3x+5} dx = \frac{1}{3} e^{3x+5} + c$$

$$u = 3x+5 \\ u' = 3$$

$$3. \frac{1}{6} \int 6x \cdot e^{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} e^{3x^2+5} + c$$

$$u = 3x^2+5 \\ u' = 6x$$

$$3c) \quad \boxed{\int \frac{u'}{u} dx = \ln(|u|) + c}$$

exemples :

$$1. \int \frac{1}{x+3} dx = \ln(|x+3|) + c$$

$$u = x+3 \\ u' = 1$$

$$2. \int \frac{7}{x+3} dx = 7 \int \frac{1}{x+3} dx = 7 \ln(|x+3|) + c$$

$$3. \int \frac{10x}{5x^2+4} dx = \ln(|5x^2+4|) + c$$

$$u = 5x^2+4 \\ u' = 10x$$

$$\int \frac{10x}{(5x^2+4)^2} dx = \int 10x \cdot (5x^2+4)^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} (5x^2+4)^{-2+1} + c$$

$$\left(\frac{u'}{u^2} \text{ prop. 3a) } \right)$$

$$= -(5x^2+4)^{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{5x^2+4} + c$$

$$4. \int \frac{15x^3+5}{3x^4+4x-1} dx = \int \frac{5(3x^3+1)}{3x^4+4x-1} dx = \frac{5}{4} \int \frac{4(3x^3+1)}{3x^4+4x-1} dx$$

$$\left(\frac{u'}{u} \right)$$

$$u = 3x^4+4x-1$$

$$u' = 12x^3+4 = 4(3x^3+1)$$

$$= \frac{5}{4} \ln(|3x^4+4x-1|) + c$$

$$3d) \int \cos(u) \cdot u' dx = \sin(u) + C$$

$$3e) \int \sin(u) \cdot u' dx = -\cos(u) + C$$

exemples 1) $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$

$u = 2x$
 $u' = 2$

2) $\int \sin(-x) dx = - \int -\sin(-x) dx = -(-\cos(-x)) + C$

$u = -x$
 $u' = -1$

$= \cos(-x) + C$