Révision d'analyse I - Problèmes d'examens

Juin, 2015

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{15e^x - 15}{e^x + 5}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

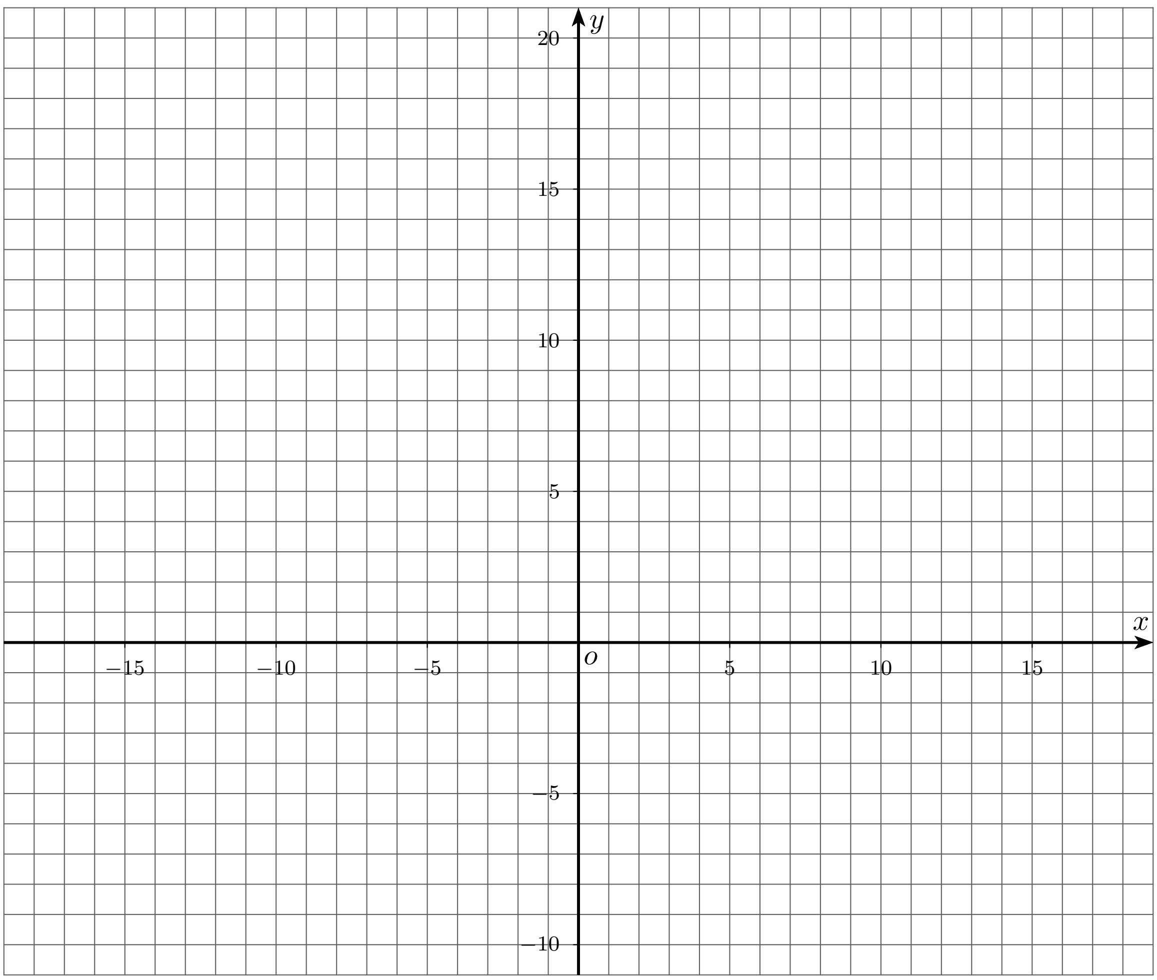
b) Calculer les éventuels zéros de f.

c) Etudier le signe de f.

d) Calculer la dérivée f' de f et étudier la croissance de f.

e) Déterminer, par calculs, les éventuelles asymptotes horizontales de f.

f) Représenter ci-dessous les éventuelles asymptotes horizontales de f ainsi que l'esquisse du graphe de cette fonction f à l'aide des informations récoltées ci-dessus.



Juin, 2016

1^e partie

Un bureau d'analyse a estimé que le bénéfice, en CHF, réalisé par une entreprise lorsqu'elle vend x objets est donné par la fonction f suivante :

$$f(x) = 2'000 \cdot (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} + 10'000 \qquad\qquad \text{avec } x \geq 73$$

a) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 100 objets.

b) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 400 objets.

c) Montrer que $f'(x) = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (2 - 0,01x)$.

d) Déterminer quel doit être le nombre d'objets vendus pour que le bénéfice soit maximal et calculer ce bénéfice maximal.

2^e partie

Chaque question se résout indépendamment des autres. Les réponses doivent être détaillées.

a) Soit la fonction k définie par $k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.
Déterminer une équation de la tangente t à la courbe représentative de k en son point $T(1\,;\,?)$.

b) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1}$

c) Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ n'a pas de zéro.

Juin, 2017

Les questions ci-dessous sont indépendantes les unes des autres.
Les réponses doivent être détaillées.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$.

b) Déterminer les équations des asymptotes de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{1 - x}$.

c) Déterminer une équation de la tangente t à la courbe $y = e^{2x+4}$ au point $T(-2; ?)$ de la courbe.

d) Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4}$

Juin, 2018

Une entreprise produit des casques audio. Le coût total de fabrication (en CHF) de x casques audio est donné par la fonction

$$T(x) \;=\; 20'000 \cdot e^{0{,}001x} \,.$$

a) Soit $C(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ le coût de fabrication d'un seul casque audio. Déterminer la quantité x à produire pour minimiser $C(x)$, puis calculer ce coût minimal à 5 centimes près.

b) On suppose que le prix de vente d'un casque audio est de CHF 80.- et on s'intéresse au bénéfice engendré par la vente des casques audio, à savoir la différence entre le montant total des ventes et le coût total de fabrication.

   (i) Quel est, à 5 centimes près, le bénéfice obtenu si cette entreprise vend 500 casques audio ?

   (ii) Soit $B(x)$ le bénéfice obtenu par la vente de x casques audio. Déterminer, à l'unité près, la quantité x à produire pour maximiser $B(x)$.

Juin, 2019

Un avion d'acrobaties vole à une altitude constante avant de plonger vers le sol et de remonter ensuite. L'altitude (en mètres) de l'avion en fonction du nombre x de minutes écoulées depuis le début du plongeon est donnée par la fonction

$$f(x) = 4'000 - \frac{10'000\ln(x+1)}{x+1}$$

a) Quelle était l'altitude de l'avion au début du plongeon ?

b) Prouver par calculs que la dérivée de $f(x)$ est

$$f'(x) = \frac{10'000\,[\ln(x+1) - 1]}{(x+1)^2}$$

c) Après combien de temps (à la seconde près) l'avion aura-t-il atteint son altitude minimale ?

d) Vérifier par calcul que l'avion ne touchera pas le sol sachant qu'il survole une plaine située à 297 mètres d'altitude.

e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$