Problème 4 (19 points)

a) $e^x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ED(f) = \mathbb{R}}$

b) $e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$ $\boxed{f \text{ a donc un unique zéro : } x = 0}$.

c) Etudions le signe de f :

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

d) $$f'(x) = \left(\frac{15e^x - 15}{e^x + 5}\right)' = \frac{(15e^x - 15)'(e^x + 5) - (15e^x - 15)(e^x + 5)'}{(e^x + 5)^2} =$$

$$\frac{15e^x(e^x + 5) - (15e^x - 15)e^x}{(e^x + 5)^2} = \frac{15e^x(e^x + 5 - (e^x - 1))}{(e^x + 5)^2} = \boxed{\frac{90e^x}{(e^x + 5)^2}}$$

Etudions la croissance de f :

x	
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

e) Recherche d'asymptote vers $+\infty$:

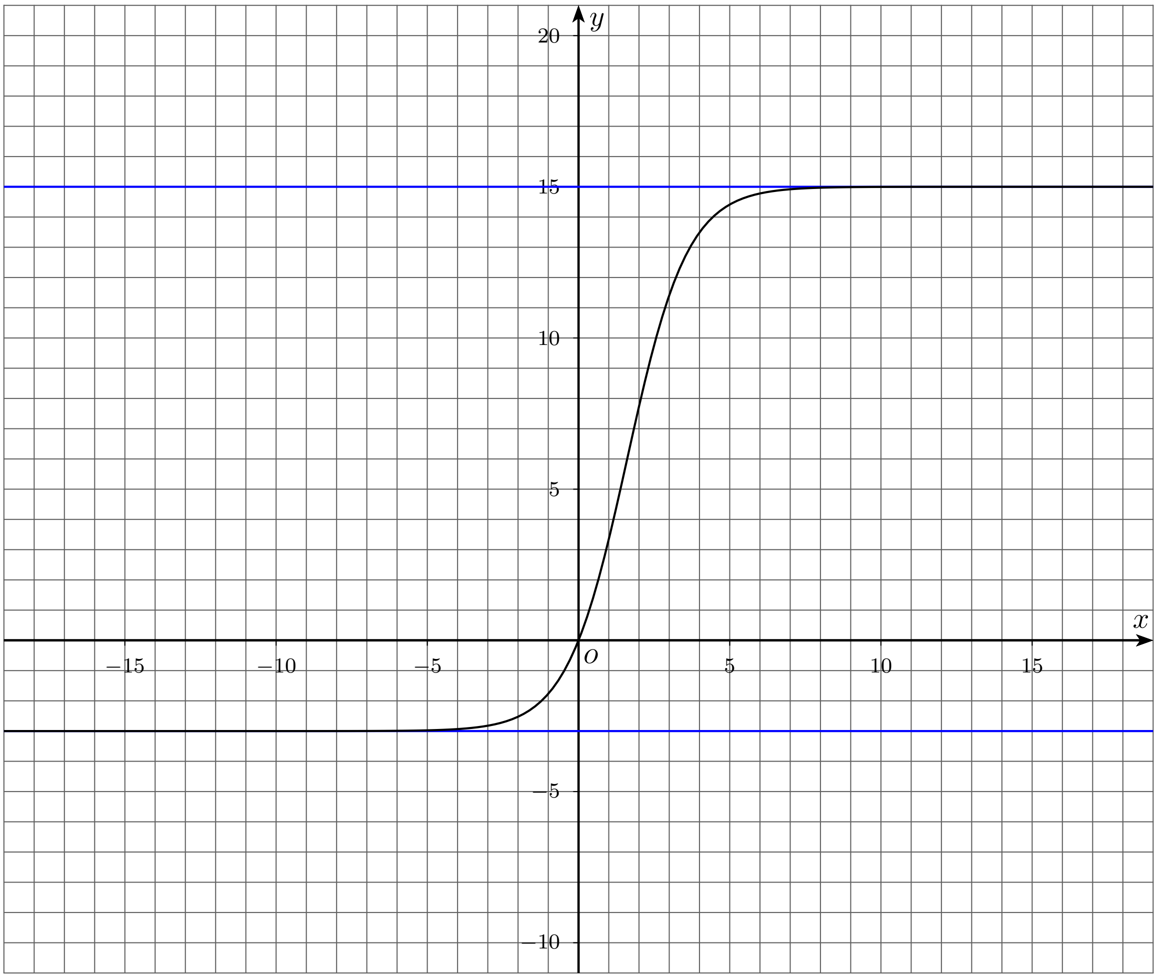
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{15(e^x - 1)}{e^x + 5} \overset{"\frac{\infty}{\infty}", B.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{15e^x}{e^x} = 15$$

Ainsi f possède une asymptote horizontale vers $+\infty$ d'équation $\boxed{y = 15}$.

Recherche d'asymptote vers $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{15(e^x - 1)}{e^x + 5} \overset{"\frac{-15}{5}"}{=} \frac{-15}{5} = -3$

Ainsi f possède une asymptote horizontale vers $-\infty$ d'équation $\boxed{y = -3}$.

f)



1e partie (12 points)

a) $f(100) = 2'000 \cdot (100 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-1-1} + 10'000 = 0 + 10'000 = \boxed{10'000 \text{ CHF}}$.

b) $f(400) = 2'000 \cdot (400 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-4-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 300 \cdot \mathrm{e}^{-5} + 10'000 \simeq$

$4'042{,}77 + 10'000 \simeq \boxed{14'042{,}75 \text{ CHF}}$.

c) $f'(x) = 2'000 \cdot [(x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1}]' = *$

$u(x) = x - 100 \;\Rightarrow\; u'(x) = 1$

$v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \;\Rightarrow\; v'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)$ car $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u'$.

De plus, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \;\Rightarrow$

$* = 2'000 \cdot [(1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} + (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [(1 + (x - 100) \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [1 - 0{,}01x + 1] = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (2 - 0{,}01x)$

d) Zéro de f' : $2 - 0{,}01x = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}01x = 2 \;\Rightarrow\; x = 200$.

Contrainte : $x \geq 73$.

x		200	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Croissance de f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Pour que le bénéfice soit maximal, il faut vendre $\boxed{200 \text{ objets}}$.

Bénéfice maximal : $f(200) = 2'000 \cdot (200 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-2-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 100 \cdot \mathrm{e}^{-3} + 10'000 \simeq$

$9'957{,}40 + 10'000 \simeq \boxed{19'957{,}40 \text{ CHF}}$.

2e partie

a) **Question 4** (5 points)

$k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

$k(1) = 1^2 \cdot \ln(1) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow T(1\,;\,0)$.

$k'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$.

$k'(1) = 2 \cdot \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 = m =$ pente de $t \Rightarrow (t) : y = x + h$.

$T(1\,;\,0) \Rightarrow 0 = 1 + h \Rightarrow h = -1 \Rightarrow \boxed{(t) : y = x - 1}$ (ou : $\boxed{x - y - 1 = 0}$)

b) **Question 5** (5 points)

a) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{0_+}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\infty} = 0_+ \cdot 0_+ = 0_+$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1} \overset{\text{B-H}}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0_+$.

c) **Question 6** (3 points)

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$.

$\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc, f n'a pas de zéro.

Problème 7. **(21 points)**

a) Ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$:

$$x^2 - 3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) > 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,

$$\boxed{\mathrm{ED}(f) =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[}$$

b) Ensemble de définition de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{-x + 1}$:

$$\mathrm{ED}(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Asymptote verticale :

$$\lim_{x \to 1} g(x) \overset{\frac{3 \cdot 2}{0}}{=} \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{A. V. en } x = 1.}$$

Asymptote oblique $\big($car deg(numérateur) $=$ deg(dénominateur)+1$\big)$:
Par division euclidienne, on obtient

$$\begin{array}{rr|l} & x^2 + 2x + 3 & -x + 1 \\ - & x^2 - x & \hline -x - 3 \\ \hline & 3x + 3 & \\ - & 3x - 3 & \\ \hline & 6 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\text{A. O. en } y = -x - 3}$$

c) Soit $y = f(x) = e^{2x+4}$. Alors

$$f'(x) \;=\; 2 \cdot e^{2x+4}$$

d'où

$$f'(-2) \;=\; 2 \cdot e^{0} \;=\; 2 \;=\; m, \text{ la pente de la tangente } t.$$

Méthode 1 : L'équation de la tangente t est de la forme $y = mx + h$, avec $m = 2$. De plus, t passe par le point $T(-2; 1)$ ($f(-2) = e^0 = 1$) :

$$1 \;=\; 2 \cdot (-2) + h \quad \Rightarrow \quad h \;=\; 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{y \;=\; 2x + 5.}$$

Méthode 2 : A l'aide de la formule

$$y - f(a) \;=\; f'(a)(x - a).$$

On a $f'(-2) = 2$ et $f(-2) = 1$. Ainsi,

$$y - 1 \;=\; 2(x + 2),$$

d'où

$$\boxed{y \;=\; 2x + 5.}$$

d) (i)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} \;=\; 0 \cdot 0 \;=\; \boxed{0}$$

(ii)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4} \;\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{BH}}{=}}\; \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x} \;=\; \boxed{\frac{1}{4}}$$

Problème 5 (21 points)

a) Fonction :

$$C(x) \;=\; \frac{20'000 \cdot e^{0.001x}}{x}.$$

Dérivée :

$$C'(x) \;=\; \frac{20'000 \cdot 0.001 \cdot e^{0.001x} \cdot x - 20'000 \cdot e^{0.001x}}{x^2} \;=\; \frac{20 \cdot e^{0.001x} \cdot (x - 1'000)}{x^2}.$$

Condition : $x \geqslant 0$.
Croissance :

x	$-\infty$		0		$1'000$		$+\infty$
$20 \cdot e^{0.001x}$		$+$		$+$		$+$	
$x - 1'000$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$C'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$C(x)$			$+\infty$	$\searrow$	$20\,e$	$\nearrow$	$+\infty$

Minimum :

$$x = 1'000 \text{ et } C(1'000) = 20\,e \cong 54.35.$$

Quantité à produire pour minimer $C(x)$: $1'000$ casques audio
Coût unitaire minimal : CHF 54.35.

b) (i)

$$B(500) \;=\; 80 \cdot 500 - 20'000 \cdot e^{0.001 \cdot 500} \cong 7025.55[\text{CHF}].$$

(ii) Fonction :

$$B(x) = 80x - 20'000 \cdot e^{0.001x}$$

Dérivée :

$$B'(x) \;=\; 80 - 20'000 \cdot 0,0001 \cdot e^{0.001x} = 80 - 20 \cdot e^{0.001x}$$

Zéro de la dérivée :

$$\begin{aligned} B'(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 80 \;=\; 20 \cdot e^{0.001x} \;\Leftrightarrow\; e^{0.001x} \;=\; 4 \\ &\Leftrightarrow\; 0.001x \;=\; \ln(4) \;\Leftrightarrow\; x \;=\; 1'000 \cdot \ln(4) \cong 1'386. \end{aligned}$$

Condition : $x \geqslant 0$.

Croissance :

x	$-\infty$		0		$1'000 \cdot \ln(4)$		$+\infty$
20		$+$		$+$		$+$	
$4-e^{0.001x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$B'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$			$-20'000$	$\nearrow$	$80'000 \cdot \big(\ln(4)-1\big)$	$\searrow$	$-\infty$

Maximum :

$$x = 1'000 \cdot \ln(4) \text{ et } B\big(1000\ \ln(4)\big) = 80'000 \cdot \big(\ln(4)-1\big).$$

Quantité à produire pour maximiser $B(x)$: $1'386$ casques audio

Problème 4 (17 points)

a) $f(0) = 4'000 - 0 = \boxed{4'000 \text{ mètres}}$

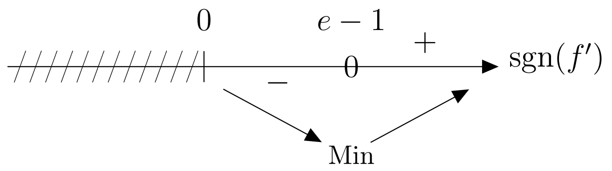
b) $f'(x) = 0 - 10'000 \dfrac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = -10'000 \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= 10'000 \dfrac{\ln(x+1) - 1}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{10'000\,[\ln(x+1) - 1]}{(x+1)^2}}$ cqfd

c) Contrainte : $x \geqslant 0$ (donc la condition mathématique $x > -1$ n'a plus d'importance)

Zéro de f' : $\ln(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1 \cong 1{,}72$

Croissance de $f(x)$:



L'avion atteindra donc son altitude minimale après 1,72 minutes environ, c'est-à-dire $\boxed{1 \text{ min } 43 \text{ sec}}$ environ.

d) $f(\mathrm{e} - 1) = 4'000 - \dfrac{10'000 \ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} \cong 321{,}2$

L'altitude minimale sera alors de 321,2 mètres.

$\boxed{\text{Donc, en effet, l'avion ne touchera pas le sol car } 321{,}2 > 297}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{BH}{=} 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10'000 \frac{1}{x+1}}{1} = 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{10'000}{x+1}}_{\to 0} = \boxed{4'000}$