

Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

6.1 Les fonctions trigonométriques

Dans un système d'axes Oxy , rappelons que le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α (degrés ou radians) avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

6.1.1 Fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha)$:

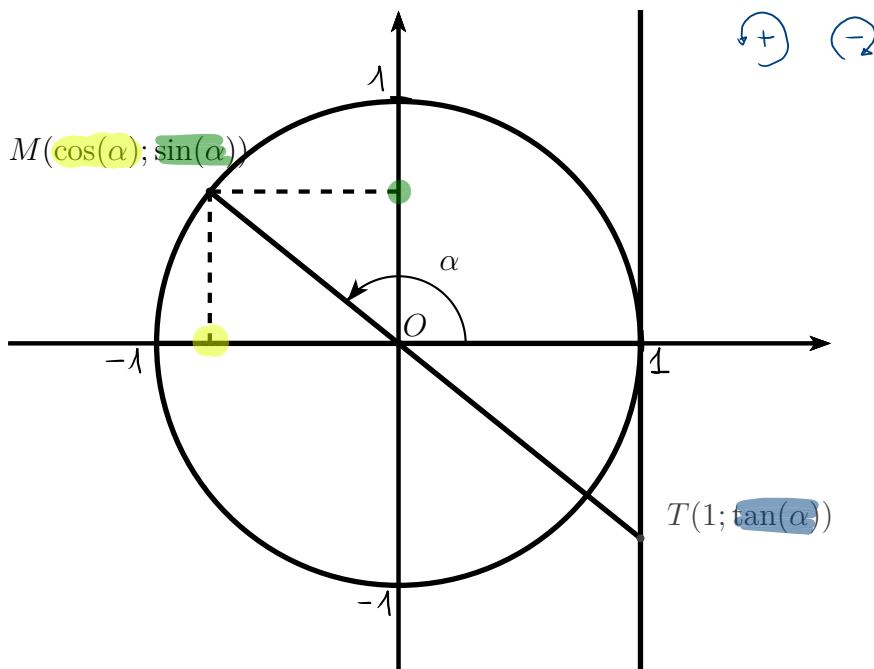
1^{ère} coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\sin(\alpha)$:

2^e coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\tan(\alpha)$:

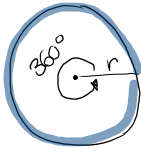
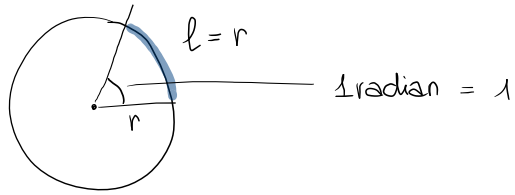
2^e coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 6.1.

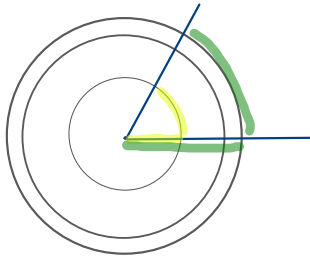
- Lorsque α est compris entre 0° et 90° , on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.
- Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.

Radian : L'angle de 1 radian découpe sur un cercle de rayon r
un arc de cercle de longueur r



$$\ell = 2\pi r \Rightarrow 360^\circ \leftrightarrow 2\pi$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi$$

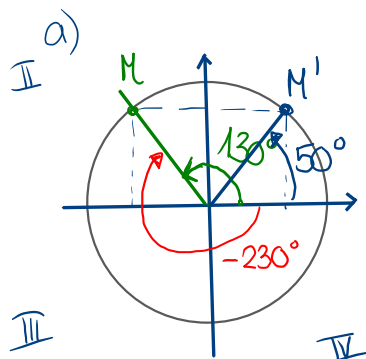


Exemple 6.1.

Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des deux angles α suivants à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

a) $\alpha_1 = 130^\circ$

b) $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6}$



$$\begin{aligned}\cos(130^\circ) &= \cos(-230^\circ) \\ &= \cos(490^\circ) \\ &= \cos(130^\circ + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= -\cos(50^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(130^\circ) &= \sin(-230^\circ) = \sin(130^\circ + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \sin(50^\circ)\end{aligned}$$

6.1.2 Périodicité

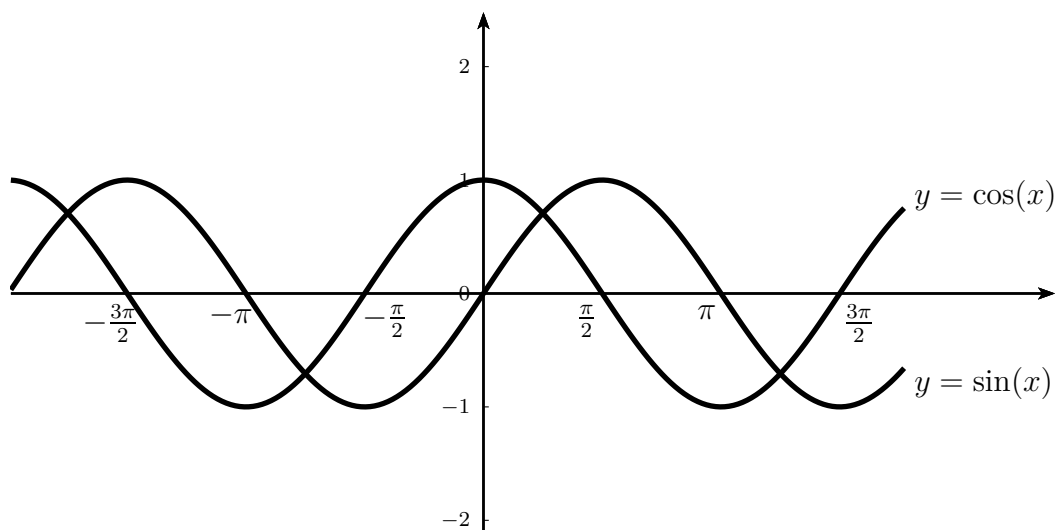
- $\sin(\alpha) \in [-1; 1]$, $\cos(\alpha) \in [-1; 1]$ et $\tan(\alpha) \in]-\infty; +\infty[$.
- Les fonctions trigonométriques sont **périodiques** :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .



$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

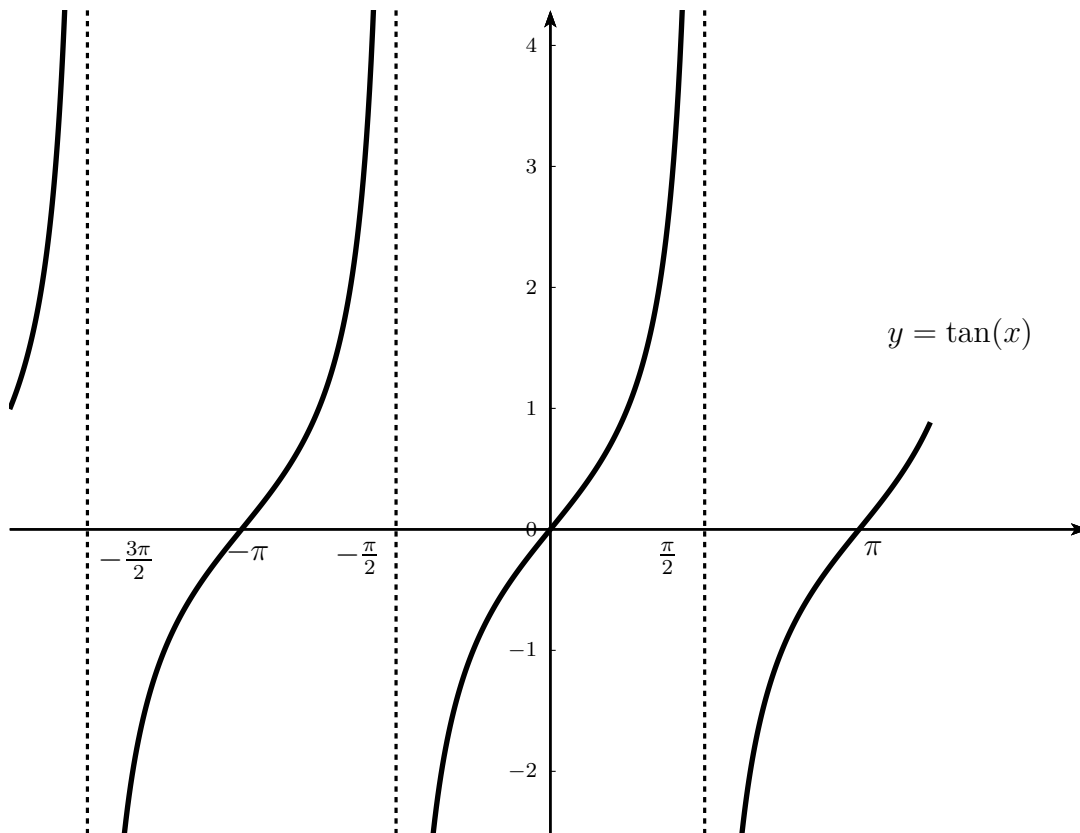
$$x \longmapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cos(x)$$

Graphes de la fonction tangente (en radians)

La fonction tangente est **périodique de période π** .



$$\begin{array}{ccc} \tan & : & \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \tan(x) \end{array}$$

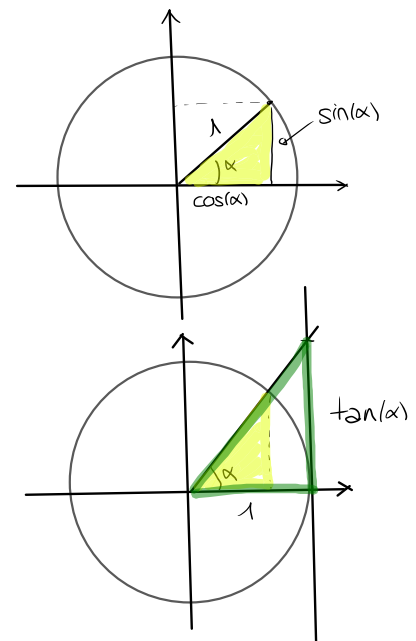
6.1.3 Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

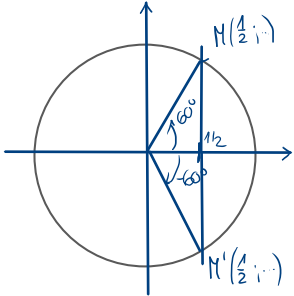


6.2 Equations trigonométriques

Une **équation trigonométrique** est une équation contenant des expressions trigonométriques.

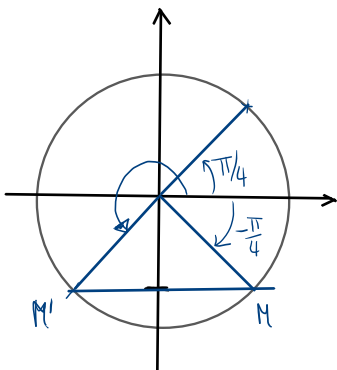
Exemple 6.2.

a) Résoudre en degrés l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$



$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ -60^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

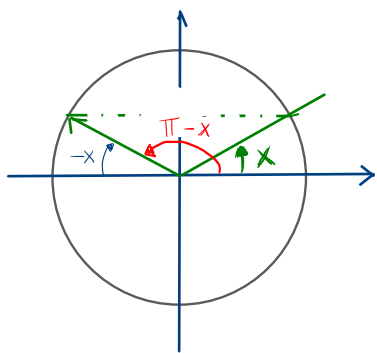
b) Résoudre en radians l'équation $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$2x = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{5\pi}{8} + k \cdot \pi \\ -\frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Généralisation :



à la m. : $\sin^4(a)$

$$\sin(x) = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} x + k \cdot 2\pi \\ \pi - x + k \cdot 2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Résoudre en radians l'équation $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

$$3x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

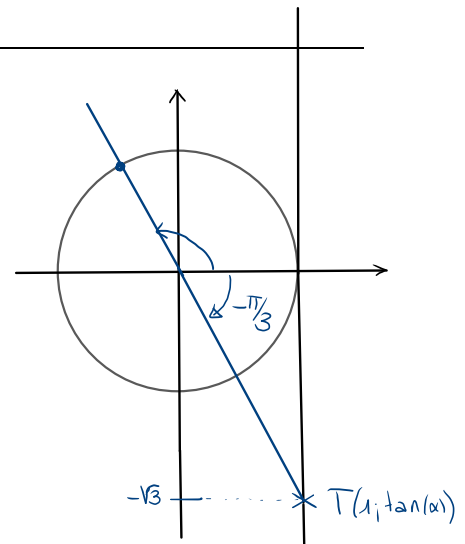
$$3x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$3x = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

$$\div 3$$



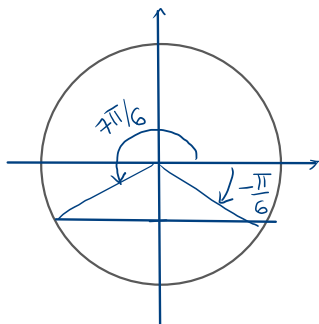
d) Résoudre en radians l'équation $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5 = 4$

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$-5$$

$$\div 2$$



$$2x + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$2x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$2x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \\ \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ex 6.1

6.2 a) b) c) f)

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2$$

e) Résoudre en radians l'équation $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

Comme $\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}_{\text{propriété fondamentale}} \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

on substitue

$$\Rightarrow 2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$-2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 = 0$$

$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ changement de variable : on pose $y = \sin(x)$

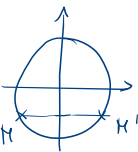
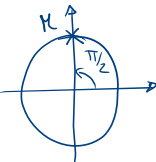
$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Delta = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

(chgmt variable)

$$\begin{aligned} \sin(x) = 1 & \Leftrightarrow x = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} & \Leftrightarrow x = \left\{ \begin{matrix} -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi} \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$



6.5 Exercices

6.1

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos(t) = -1.43$

g) $\tan(5t) = 3.273$

b) $\sin(t) = 0.829$

e) $\tan(t) = 5.33$

h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $\tan(t) = -0.754$

f) $\sin(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.2

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $4\sin^2(x) - 3 = 0$

b) $\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

e) $(\sin(x) - 1)\cos(x) = 0$

c) $2\cos(t) + 1 = 0$

f) $\sqrt{3} + 2\sin(3x) = 0$

6.3

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $4\cos^2(t) - 4\cos(t) - 3 = 0$

d) $3\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

b) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

e) $5\sin(x) = 6\cos^2(x)$

c) $3\sin^2(z) + 8\cos(z) + 1 = 0$

f) $\tan^4(t) - 4\tan^2(t) + 3 = 0$

6.4

De nombreuses populations animales fluctuent selon un cycle de 10 ans. Supposons que le nombre de lapins dans une région à l'instant t (en années) soit donné (la fonction $\cos$ est en radians) par

$$N(t) = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$$

a) Vérifier par calculs que le cycle de fluctuation de la population est bien de 10 ans.

b) Représenter graphiquement N pour $t \in [0; 10]$.

c) Pour quelles valeurs de t dans l'intervalle $[0; 10]$ a-t-on une population supérieure ou égale à 4500 ?

6.6 Réponses

6.1

- a) $t_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 = -120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- b) $t_1 \cong 56^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 \cong 124^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- c) $t \cong -37^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- d) Pas de solution
- e) $t \cong 79.4^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- f) $t_1 = -20^\circ + k \cdot 120^\circ, t_2 = 80^\circ + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- g) $t \cong 14.6^\circ + k \cdot 36^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- h) $t_1 = 240^\circ + k \cdot 720^\circ, t_2 = -240^\circ + k \cdot 720^\circ, k \in \mathbb{Z}$

6.2

- a) $t_1 = k \cdot 3\pi, t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\pi, t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, t_2 = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $x_1 = -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

6.3

- a) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $z = \pm 2.016 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $x_1 = 0.730 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 2.412 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

6.4

- c) $[0; \frac{5}{3}] \cup [\frac{25}{3}; 10]$

6.5

- a) 240 jours; b) nombre maximal de 15 heures le 169^{ème} jour.