Chapitre 5

Équations et inéquations du 1^{er} degré

5.1 Équations du premier degré

Définition :
Une **équation** est une égalité comprenant des nombres et des lettres. Cette relation d'égalité peut être juste ou fausse en fonction des valeurs attribuées aux lettres. L'écriture d'une équation se compose de trois parties, à savoir, le *membre de gauche*, le *signe d'égalité* et le *membre de droite.*

Exemple :
$3x - 5 = 7x + 3$ est une équation du premier degré.

5 est-il solution de cette équation ? $3 \cdot 5 - 5 \overset{?}{=} 7 \cdot 5 + 3 \iff 10 \overset{?}{=} 38$ Faux $\Rightarrow$ Non

-2 est-il solution de cette équation ? $3 \cdot (-2) - 5 \overset{?}{=} 7 \cdot (-2) + 3 \iff -11 \overset{?}{=} -11$ Vrai $\Rightarrow$ Oui

Deux équations sont dites **équivalentes** $\iff$ si elles ont le même ensemble de solutions. Ainsi, pour résoudre une équation, on utilise les quatre **principes d'équivalence** suivants :

- On obtient une équation équivalente à une équation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite.

$$3 = x$$
$$\iff x = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{3\}$$

- On obtient une équation équivalente à une équation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'équation la même expression.

$$x - 5 = 2 \quad | +5$$
$$x - 5 + 5 = 2 + 5$$
$$\iff x = 7$$
$$\Rightarrow S = \{7\}$$

$$x + 4 = -5 \quad | -4$$
$$x + 4 - 4 = -5 - 4$$
$$x = -9$$
$$\Rightarrow S = \{-9\}$$

- On obtient une équation équivalente à une équation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'équation par une même expression non nulle.

$\frac{x}{2} = 3 \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6\}$

$3x = 12 \quad | \div 4$

$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$

- On obtient une équation équivalente à une équation donnée si on effectue et réduit les membres de l'équation par du calcul littéral.

$x = 4x - 2(2x-1) \quad |$ CL.

$x = 4x - 4x + 2$

$x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

Résoudre une équation du premier degré revient à chercher l'ensemble des valeurs de x qui vérifient l'égalité. Pour cela, il faut :

a) Développer et réduire chacun des membre.

b) Isoler l'inconnue dans un des membre de l'équation et les valeurs numériques dans l'autre. (Utilisation des principes d'équivalence.)

c) Diviser chaque membre par le coefficient de l'inconnue.

d) Identifier et écrire l'ensemble de solution.

e) Vérifier la valeur trouvée : remplacer, dans l'équation initiale, l'inconnue par la valeur trouvée et voir si l'égalité est vérifiée.

Exemples

a) $4x - 3 = 7 - x \quad | +x$

$5x - 3 = 7 \quad | +3$

$5x = 10 \quad | \div 5$

$x = 2$

$\Rightarrow S = \{2\}$ + vérif.

b) $2(3x - 2) = 3(4x + 2) + 4x$

$S = \{-1\}$

c) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{11x}{6}$ | m̂ dénom.

$\frac{3(3x-1)}{6} - \frac{2(x+2)}{6} = \frac{11x}{6}$ | $\cdot 6$

$3(3x-1) - 2(x+2) = 11x$ | CL

$9x - 3 - 2x - 4 = 11x$

$7x - 7 = 11x$ | $-7x$

$-7 = 4x$ | $\div 4$

$-\frac{7}{4} = x$

$S = \{-\frac{7}{4}\}$

ex 5.6 , 5.7

(5.8)

ex 5.1 à 5.5 (ex 5.2 1))

Les **équations** sont très souvent **utilisées pour résoudre des problèmes**.
Pour résoudre un problème, il faut :

1. Lire attentivement et complètement l'énoncé.
2. Identifier ce que l'on connaît et ce que l'on cherche.
3. Si nécessaire, faire un croquis de la situation.
4. Choisir l'inconnue avec son unité. souvent celle qui répond à la question.
5. Poser l'équation exprimant la situation décrite.
6. Résoudre l'équation.
7. Contrôler les solutions obtenues. Sont-elles cohérentes ?
8. Donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple :

On distribue une somme de CHF 200 à trois enfants : David, Lisa et Maxime. On suppose que Maxime reçoit CHF 20 de plus que David et CHF 10 de moins que Lisa. Combien d'argent a reçu Lisa ?

Soit x = somme reçue par Lisa en CHF
$x-10$ " " " Maxime " $\downarrow -10$
$x-30$ " " " David " $\downarrow -20$

$$
\begin{aligned}
x + x-10 + x-30 &= 200 \\
3x - 40 &= 200 \\
3x &= 240 \\
x &= 80
\end{aligned}
$$

Vérification : Maxime : $80-10 = 70$ CHF
David : $80-30 = 50$ CHF
Total : $80+70+50 = 200$ CHF ✓

Lisa a reçu 80 CHF

5.2 Inéquations du premier degré

Rappel : $\leq$ inférieur ou égal $\geq$ supérieur ou égal
$<$ strictement inférieur $>$ strictement supérieur

Exemples :

Parmi ces valeurs, $\{-1\,;0\,;\frac{3}{2}\,;4\,;7\}$ déterminer celles qui vérifient les inéquations suivantes ?

a) $x < 4$: $-1\,;0$ et $\frac{3}{2}$ b) $x \leq 4$ $-1, 0, \frac{3}{2}$ et 4

Définition :

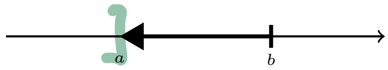
Une **inéquation** est une équation dans laquelle le symbole égal est remplacé par l'un des quatre symboles d'inégalité ci-dessus. Comme pour les équations, son écriture se compose de trois parties : le membre de gauche, le symbole d'inégalité, et le membre de droite.

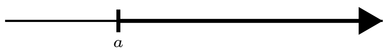
Généralement, une inéquation possède une infinité de **solutions**. Pour noter les solutions d'une inéquation, on utilise des **intervalles** de nombres réels (a, $b \in \mathbb{R}$) :

Intervalle fermé : $[\,a\,;\,b\,] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\,\}$

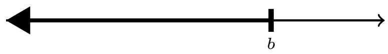

Intervalle ouvert : $]\,a\,;\,b\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\,\}$


Intervalles semi-ouverts : $[\,a\,;\,b\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\,\}$


$]\,a\,;\,b\,] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\,\}$


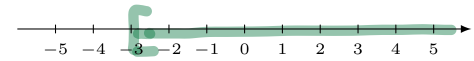
Autres intervalles : $[\,a\,;+\infty\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\,\}$


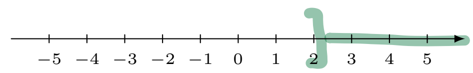
$]\,a\,;+\infty\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x > a\,\}$

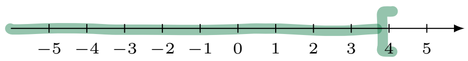

$]-\infty\,;\,b\,] = \{\,x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\,\}$


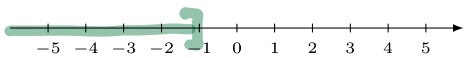
$]-\infty\,;\,b\,[= \{\,x \in \mathbb{R} \mid x < b\,\}$

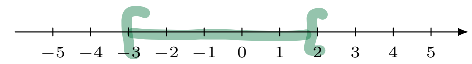

Exemples :

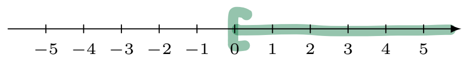
a) $x \geq -3$

$S =$ $[-3\,;+\infty[$

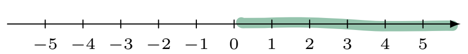
b) $x > 2$

$S =$ $]2\,;+\infty[$

c) $x < 4$

$S =$ $]-\infty\,;4[$

d) $x \leq -1$

$S =$ $]-\infty\,;-1]$

e) $-3 \leq x < 2$

$S =$ $[-3\,;2[$

f) $x \geq 0$

$S =$ $[0\,;+\infty[\; = \mathbb{R}_+$

g) $x > 0$

$S =$ $]0\,;+\infty[\; = \mathbb{R}_+^*$

ex 5.26 et 5.27 p. 99
ens. ⚠ c) avec $\cup$

Résolution algébrique d'une inéquation du 1er degré :

Lorsqu'on veut résoudre algébriquement une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'inéquation. Pour y arriver, nous allons utiliser les **principes d'équivalence** suivants :

Opérations conservant le sens de l'inégalité.

a) On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en **additionnant** ou en **soustrayant** à chacun des membres la même expression.

Exemples :

$3 < 5 \quad | +2$

$5 < 7$

$x - 2 < 5 \quad | +2$

$x < 7$

$\Rightarrow S =]-\infty\,;\,7[$

$3 < 5 \quad | -2$

$1 < 3$

$x + 2 < 5 \quad | -2$

$x < 3$

$\Rightarrow S =]-\infty\,;\,3[$

b) On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en **multipliant** ou en **divisant** chacun des membres de l'inéquation par une même expression **strictement positive**.

Exemples :

$5 < 10 \quad | \cdot 2$

$10 < 20$

$\frac{1}{2}x < 4 \quad | \cdot 2$

$x < 8$

$S =]-\infty\,;\,8[$

$4 < 8 \quad | \div 2$

$2 < 4$

$2x < 6 \quad | \div 2$

$x < 3$

$\Rightarrow S =]-\infty\,;\,3[$

Opérations changeant le sens de l'inégalité.

c) On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en **permutant** le membre de gauche et le membre de droite, puis en **changeant le sens de l'inégalité**.

Exemples :

$4 < 10 \quad | \; P$ ⚠

$10 > 4$

$4 < x \quad | \; P$ ⚠

$x > 4$

$S =]4\,;\,+\infty[$

d) On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en **multipliant** ou en **divisant** chacun des membres de l'inéquation par une même expression **strictement négative**, puis en **changeant le sens de l'inégalité**.

Exemples :

$-\frac{5}{3} < 10 \quad | \cdot(-3)$ ⚠

$5 > -30$

$-\frac{1}{2}x < 4 \quad | \cdot(-2)$ ⚠

$x > -8$

$S =]-8\,;+\infty[$

$-4 < 8 \quad | \div(-4)$ ⚠

$1 > -2$

$-2x < 6 \quad | \div(-2)$

$x > -3$

$S =]-3\,;+\infty[$

Les inéquations se résolvent comme les équations **à trois exceptions** près :

- Lorsqu'on **permute** les termes d'une inéquation, **il faut inverser l'inégalité** !
- Lorsqu'on **multiplie** une inéquation par un **nombre négatif** (non nul), **il faut inverser l'inégalité** !
- Lorsqu'on **divise** une inéquation par un **nombre négatif** (non nul), **il faut inverser l'inégalité** !

Exemples :

Résoudre les équations et les inéquations du 1er degré suivantes :

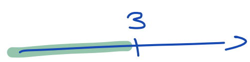
a) $x - 3 = 0 \quad | +3$

$x = 3$

$S = \{3\}$

$x - 3 < 0 \quad | +3$

$x < 3$



$S =]-\infty\,;3[$

b) $x + 5 = 0 \quad | -5$

$x = -5$

$S = \{-5\}$

$x + 5 \geq 0 \quad | -5$

$x \geq -5$

$S = [-5\,;+\infty[$

c) $2x = -6 \quad | \div 2$	$2x \leq -6 \quad | \div 2$
$x = -3$	$x \leq -3$
$S = \{-3\}$	$S =]-\infty ; -3]$

d) $\frac{x}{3} = -1 \quad | \cdot 3$	$\frac{x}{3} > -1 \quad | \cdot 3$
$x = -3$	$x > -3$
$S = \{-3\}$	$S =]-3 ; +\infty[$

e) $-5x = 10 \quad | \div (-5)$	$-5x < 10 \quad | \div (-5)$ ⚠
$x = -2$	$x > -2$
$S = \{-2\}$	$S =]-2 ; +\infty[$

f) $-\frac{x}{4} = 1 \quad | \cdot (-4)$	$-\frac{x}{4} \geq 1 \quad | \cdot (-4)$ ⚠
$x = -4$	$x \leq -4$
$S = \{-4\}$	$S =]-\infty ; -4]$

g) $3 = x \quad | \mathcal{P}$	$3 \leq x \quad | \mathcal{P}$
$x = 3$	$x \geq 3$
$S = \{3\}$	$S = [3 ; +\infty[$

ex 5.28 → 5.31 p.100 ...