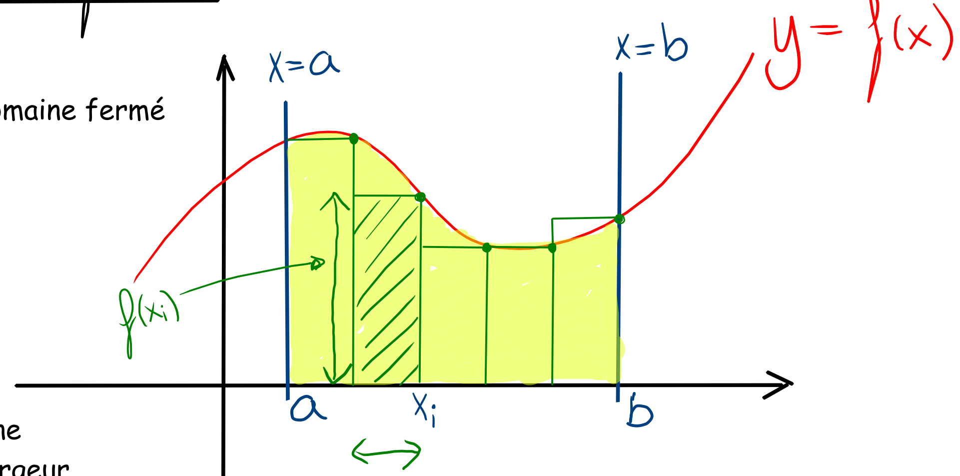
Intégrales définies

But : calculer l'aire du domaine fermé en jaune ci-contre



$\frac{b-a}{5}$ ← avec un découpage de 5 rectangles

Idée : découper le domaine en rectangles de même largeur.
Plus le nombre de rectangles est grand (donc plus leur largeur est étroite) plus la somme des aires des rectangles s'approche de l'aire du domaine.

Aire d'un rectangle :

$f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$ avec un découpage de n rectangles

A la limite quand n, le nombre de rectangles, tend vers l'infini, on obtient l'aire exacte du domaine fermé, délimité par $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$

$$\boxed{\mathcal{A} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} = \int_a^b f(x)\, dx}$$

(Somme de Riemann)

Cette limite s'appelle l'intégrale définie de a à b de la fonction f.

On calcule cette intégrale de la manière :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

a et b sont les bornes de l'intégrale.

Exples

1) $$\int_0^4 (x+2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_0^4 = \left(\frac{1}{2}\cdot 16 + 2\cdot 4\right) - (0+0) = 8+8 = 16$$

2) $$\int_{-1}^{1} (x^2+7)\cdot x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x(x^2+7)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+7)^2 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(x^2+7)^2\Big|_{-1}^{1}$$

$u = x^2+7$
$u' = 2x$

$$= \frac{1}{4}64 - \frac{1}{4}64 = 0$$

3) $$\int_3^4 (x^2 - 7x + 10)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x \Big|_3^4$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{7}{2}\cdot 16 + 40\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{7}{2}\cdot 9 + 30\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 56 + 40 - \left(9 - \frac{63}{2} + 30\right) = -\frac{13}{6}$$

Rem : On obtient des résultats positifs, nuls ou négatifs, ce n'est donc pas une aire géométrique. On appelle ce résultat une aire algébrique