Limites de fonctions

Exple : $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$

Déterminons son ensemble de définition

V.i : $x^2 - 6x + 8 \neq 0$

$(x-2)(x-4) \neq 0$

$\quad\downarrow \qquad \downarrow$

$\quad 2 \qquad 4$ $\Longrightarrow$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{2;4\}$

But : étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'une valeur interdite ou pour des x s'approchant de $-\infty$ ou de $+\infty$.

Pour la valeur interdite $x = 2$, il semble que le point $(2;-2{,}5)$ est un point de la courbe $y = f(x)$, or ce n'est pas le cas.

On a $\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$

On définit une nouvelle fonction $g(x) = \frac{x+3}{x-4}$, qui est définie pour $x=2$

$\Rightarrow g(2) = \frac{2+3}{2-4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow (2;-2{,}5)$ (qui est sur la courbe $y=g(x)$)

On appelle cette fonction g la prolongée par continuité de f.

Elle nous permet de calculer la valeur limite de f en $x=2$,

on note

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = -2{,}5$$

" limite quand x tend vers 2 de $f(x)$ "

Cela signifie que lorsque x s'approche indéfiniment près de 2, $f(x)$ s'approche de $-2{,}5$.

$(2;-2{,}5)$ est un " trou " du graphe de f.

Rem : 1) D'une manière générale on utilise le calcul de limite pour $a \notin ED(f)$.

2) Pour $a \in ED(f)$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exples

1) $\underbrace{\lim_{x\to -3} \frac{x^2+4x+3}{x^3-9x}}_{f(x)} = \frac{9-12+3}{-27+27} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{x\cancel{(x+3)}(x-3)}$

forme indeterminée (f.i.)

$= \lim_{x\to -3} \frac{x+1}{x(x-3)} = \frac{-3+1}{-3(-6)} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$ $\Rightarrow$ $(-3; -\frac{1}{9})$ est un "trou" de $y=f(x)$

2) $\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x^2+4x+3}{x^3-9x}}_{f(x)} = \frac{4+8+3}{8-18} = \frac{15}{-10} = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $(2; -\frac{3}{2})$ est un point de $y=f(x)$

3) $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1-4+3}{-1+9} = \frac{0}{8} = 0 = f(-1)$ $\Rightarrow$ $(-1; 0)$ " " "

interprétation

ex 2.4.2
2.4.3

Ex 2.4.3

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2x-6} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{2(\cancel{x-3})} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{100x^2}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} 100x = 0$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{(\cancel{x-2})(x+1)}{(x+4)(\cancel{x-2})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 2$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+3x-4} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\cancel{x-1})(2x^2-x-1)}{(\cancel{x-1})(x+4)} = \frac{2-1-1}{5} = \frac{0}{5} = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & \vert\ 0 \end{array}$$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^3-4x^2-7x+10} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x^2-3x-10)} = \frac{1}{1-3-10} = -\frac{1}{12}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ 1 & & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & \vert\ 0 \end{array}$$

$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$

Exemple : ED(f), signe et limite quand x tend vers une v.i.

$$f(x) = \frac{-2x^2-7x+4}{x^3+64} = \frac{-(2x-1)(x+4)}{(x+4)\underbrace{(x^2-4x+16)}_{\Delta<0}}$$

$\Delta = 49+32 = 81$

zéros : $\dfrac{7 \pm 9}{-4} = \begin{cases} -4 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

v.i : -4

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$

2) signe

x		-4		$1/2$	
	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$

(2)

$f(1000) : \dfrac{-}{+}$

3) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{-2x+1}{x^2-4x+16} = \dfrac{8+1}{16+16+16} = \dfrac{9}{48} = \dfrac{3}{16} \Rightarrow$ "trou" $\left(-4 ; \dfrac{3}{16}\right)$