

Asymptotes

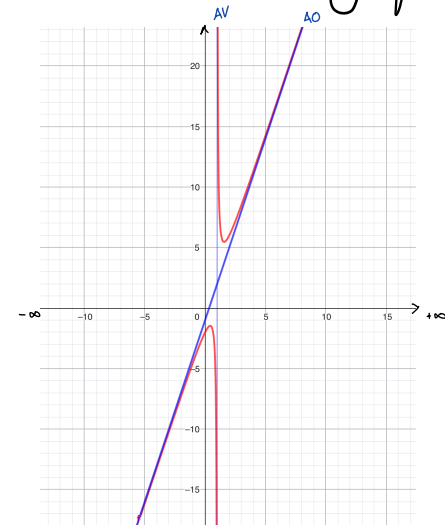
- AV : $x=a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ avec $a \notin \text{ED}(f)$, a v.i. au milieu de $\text{ED}(f)$ ou au bord de $\text{ED}(f)$
- AH : $y=b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Exple : $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x-1}$ $\text{ED}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

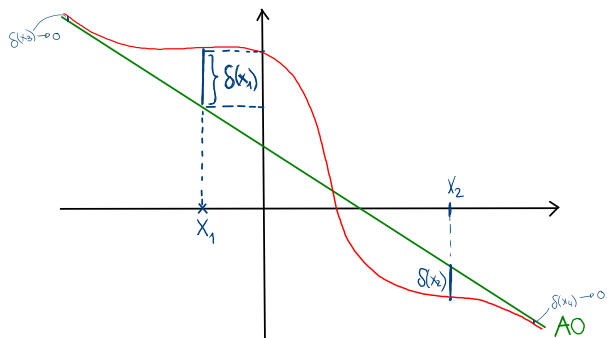
AV : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3-4+2}{0} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \text{AV : } x=1$

AH : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = 3 \cdot \infty = \infty \Rightarrow \text{pas d'AH.}$

En observant le graphe de f on constate qu'il s'approche d'une asymptote oblique (AO) à $l' \infty$: à gauche $(-\infty)$ et à droite $(+\infty)$.



Définition : la droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de $y = f(x)$ si la différence entre les deux courbes tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini



Autrement dit $f(x)$ se comporte à l'infini comme la droite $y = mx + h$ et s'écrit : $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$

Reprenons l'exemple : $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x - 1}$

on aimerait écrire $f(x) = mx + h + \delta(x)$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x + 2 & x - 1 \\ -3x^2 + 3x & 3x - 1 \\ \hline -x + 2 & \\ +x + 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = (3x - 1)(x - 1) + 1 \quad | \div (x - 1)$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x - 1} = 3x - 1 + \underbrace{\frac{1}{x - 1}}_{\delta(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow y = 3x - 1$ est l'AO

Pour les fonctions rationnelles : $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

Elles admettent une AO d'équation $y = Q(x)$ où $Q(x)$ est le quotient de la division de $N(x)$ par $D(x)$, si le degré du numérateur = degré du dénominateur + 1
($\deg(N) = \deg(D) + 1$)

- Rem :
- 1) Une courbe ne peut admettre à la fois une At et une AO
 - 2) Une At est une AO de pente $m = 0$
 - 3) L'étude de signe de $S(x)$ permet de déterminer la position relative de $y = f(x)$ et de l'AO.

Exemple

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

AV/hou :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{trou} \left(1; -\frac{3}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-6}{0} = \infty \Rightarrow \text{AV en } x = -1$$

AH/AO : AO car $\deg(N) = \deg(D) + 1$
 $3 = 2 + 1$ ✓

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + x + 2 & x^2 - 1 \\ -2x^3 & +2x \\ \hline -5x^2 + 3x + 2 & \\ +5x^2 & -5 \\ \hline 3x - 3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 5 + \frac{3x + 3}{x^2 - 1} \Rightarrow \text{AO: } y = 2x - 5$$

zéros de f : 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & -3 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 3x - 2$$

$$\Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

