

2.2 Exercices

Exercice 2.1 Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la substitution.

(1) a) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ \Rightarrow subst.

$$3x + 2(2x + 1) = 9$$

$$3x + 4x + 2 = 9$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

subst.
dans (1) $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$$\Rightarrow S = \{(1; 3)\}$$

c) $\begin{cases} 2x = 3y - 6 \\ 4x - 5y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3y - 6}{2}$ (1)

$$\frac{2}{1} \frac{3y - 6}{2} - 5y + 9 = 0$$

$$2(3y - 6) - 5y + 9 = 0$$

$$6y - 12 - 5y + 9 = 0$$

$$y - 3 = 0$$

$$y = 3$$

subst.

\Rightarrow dans (1) $x = \frac{3 \cdot 3 - 6}{2} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; 3 \right) \right\}$$

b) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5 - 3y$ (1)

$$2(-5 - 3y) + 5y = -11$$

$$-10 - 6y + 5y = -11$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

subst.
 \Rightarrow dans (1) $x = -5 - 3 \cdot 1 = -8$

$$\Rightarrow S = \{(-8; 1)\}$$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = 2y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{2y + 5}{3}$

$$\frac{2}{1} \frac{2y + 5}{3} - 5y = 7$$

$$\frac{2(2y + 5)}{3} - \frac{15y}{3} = \frac{21}{3} \quad | \cdot 3$$

$$4y + 10 - 15y = 21$$

$$-11y = 11$$

$$y = -1$$

subst.
 \Rightarrow dans (1) $x = \frac{2 \cdot (-1) + 5}{3} = \frac{-2 + 5}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$$\Rightarrow S = \{(1; -1)\}$$

Exercice 2.2 Résoudre les systèmes suivants par combinaisons linéaires.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{array} \right| \begin{array}{c|c} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 4x - 2y = -2 \\ + 3x + 2y = 9 \\ \hline 7x = 7 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + -6x + 3y = 3 \\ + 6x + 4y = 18 \\ \hline 7y = 21 \\ y = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \underline{\{ (1; 3) \}}$$

$$\text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = -5 \\ 2x + 5y = -11 \end{array} \right| \begin{array}{c|c} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + -5x - 15y = 25 \\ + 6x + 15y = -33 \\ \hline x = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2x + 6y = -10 \\ + -2x - 5y = 11 \\ \hline y = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \underline{\{ (-8; 1) \}}$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 8x + 9y - 2 = 0 \\ 3x - y - 27 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8x + 9y = 2 \\ 3x - y = 27 \end{array} \right| \begin{array}{c|c} 1 & -3 \\ 9 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 8x + 9y = 2 \\ + 27x - 9y = 243 \\ \hline 35x = 245 \\ x = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + -24x - 27y = -6 \\ + 24x - 8y = 216 \\ \hline -35y = 210 \\ y = -6 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \underline{\{ (7; -6) \}}$$

Exercice 2.3 Résoudre les systèmes suivants par combinaisons linéaires.

(1) a)
$$\begin{cases} 7y + 27 = 5x \\ 6y + 4x = 10 \end{cases}$$
 ⚠️ ordonner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7y = -27 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c} 4 & \\ 5 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -20x + 28y = -108 \\ 20x + 30y = 50 \\ \hline 58y = -58 \\ y = -1 \end{array}$$

(1)

$$\begin{aligned} 7 \cdot (-1) + 27 &= 5x \\ -7 + 27 &= 5x \\ 20 &= 5x \\ \Rightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \{(4, -1)\}$

b)
$$\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ y + 2x = 2 \end{cases}$$
 ⚠️ ordonner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & & -2 \\ 2 & & 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 2y = 4 \\ \hline 9x = 11 \\ x = \frac{11}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -10x + 4y = -14 \\ 10x + 5y = 10 \\ \hline 9y = -4 \\ y = -\frac{4}{9} \end{array}$$

$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{11}{9}, -\frac{4}{9} \right) \right\}$

c)
$$\begin{cases} 20 + 4y = 7x \\ 5x - 6y = 18 \end{cases}$$
 ⚠️ ordonner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y = 20 \\ 5x - 6y = 18 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} 3 & & -5 \\ -2 & & 7 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 21x - 12y = 60 \\ -10x + 12y = -36 \\ \hline 11x = 24 \\ x = \frac{24}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -35x + 20y = -100 \\ 35x - 42y = 126 \\ \hline -22y = 26 \\ y = -\frac{26}{22} = -\frac{13}{11} \end{array}$$

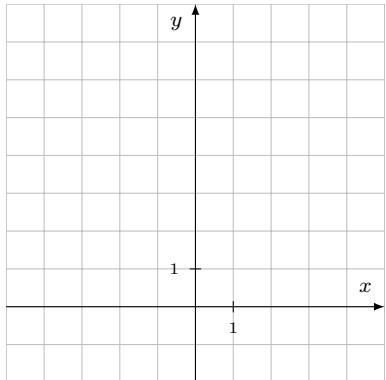
$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{24}{11}, -\frac{13}{11} \right) \right\}$

Exercice 2.4

Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants ; vérifier ensuite par calculs que la réponse obtenue est exacte :

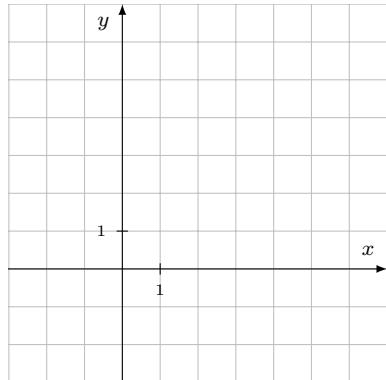
a)
$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$$

Méthode graphique :



b)
$$\begin{cases} 2x = 6 - y \\ x - 6 = -2y \end{cases}$$

Méthode graphique :



Méthode algébrique :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$$

Méthode algébrique :

$$\begin{cases} 2x = 6 - y \\ x - 6 = -2y \end{cases}$$

Exercice 2.5 Résoudre les systèmes suivants :

~~a)~~
$$\left\{ \begin{array}{l} 9(x - y) + 24x = 100 \\ 3(x - y) = 32 \end{array} \right.$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x-1)}{4} + \frac{y-2}{4} = \frac{4}{4} \\ \frac{2(x-3)}{6} - \frac{3(y+2)}{6} = -\frac{12}{6} \end{cases} \quad | \cdot 4 \quad | \cdot 6$$

$$\begin{cases} 2x-2 + y-2 = 4 \\ 2x-6 - 3y-6 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl}
 + & 6x + 3y & = 24 \\
 & 2x - 3y & = 0 \\
 \hline
 & 8x & = 24 \\
 & x & = 3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}2 \cdot 3 + y &= 8 \\6 + y &= 8 \\y &= 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \{(3; 2)\}$$

Exercice 2.6 Résoudre les systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} \frac{x+2y-4}{4} = x-1 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{2} = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2y-4}{4} = \frac{4(x-1)}{4} & | \cdot 4 \\ \frac{4(x+1)}{12} + \frac{6(y-2)}{12} = \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} & | \cdot 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-4 = 4x-4 \\ 4x+4+6y-12 = 3x+4y \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y = 0 \\ x+2y = 8 \end{cases} \quad | \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} -3x+2y = 0 \\ -x-2y = -8 \\ \hline -4x = -8 \\ x = 2 \end{array} \end{array} \quad \xrightarrow{(1)} \quad \begin{array}{l} -3 \cdot 2 + 2y = 0 \\ 2y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \{(2; 3)\}$$

b)
$$\begin{cases} (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \end{cases}$$

Exercice 2.7 Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} \\ 3x + \frac{y}{2} = 4 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 15 \\ \cdot 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 5(x-1) = 3(y-2) \\ 6x + y = 8 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 5 = 3y - 6 \\ 6x + y = 8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 3y = -1 \\ 6x + y = 8 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad y = 8 - 6x$$

$$\Rightarrow \quad 5x - 3(8 - 6x) = -1 \\ 5x - 24 + 18x = -1 \\ 23x = 23 \\ x = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = 8 - 6 \cdot 1 = 8 - 6 = 2$$

$$\Rightarrow \quad S = \underline{\left\{ (1; 2) \right\}}$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 7x - 5 = 6y + 3 \\ y + 7x = 7y + 12 \end{array} \right. \quad \text{A ordonner}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x - 6y = 8 \\ 7x - 6y = 12 \end{array} \right. \quad \text{impossible} \quad S = \emptyset$$

Exercice 2.8 Résoudre les systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 18(x - y) \\ 18x - 6y = 3x + 10y + 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{4} \\ \frac{x+13}{4} + \frac{2x+y}{8} = \frac{2y+4}{3} \end{cases}$$

Exercice 2.9

L'usine A a deux fois plus d'ouvriers que l'usine B. Le quart des ouvriers de A et le cinquième des ouvriers de B remplissent 7 bus de 25 places. Combien y a-t-il d'ouvriers dans chaque usine ?

Soit x le nbre d'ouvriers de l'usine A
et y " " " B.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ (2) \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 7 \cdot 25 = 175 \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{5x}{20} + \frac{4y}{20} = \frac{3500}{20} \mid \cdot 20 \Leftrightarrow 5x + 4y = 3500$$

substitution

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2y + 4y &= 3500 \\ 10y + 4y &= 3500 \\ 14y &= 3500 \quad \text{dans (1)} \\ y &= 250 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \cdot 250 = 500 \end{aligned}$$

Véif: $\frac{500}{4} + \frac{250}{5} = 125 + 50 = 175 \checkmark$

Rép: Il y a 500 ouvriers dans l'usine A et 250 ouvriers dans l'usine B.

Exercice 2.10

Je fais un voyage de 721 km en deux étapes. La deuxième étape compte 53 km de plus que la première. Calculer la longueur de chacune des étapes.

Soit x la 1^{ère} étape
et y la 2^e " .

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x+y = 721 \\ (2) y = x+53 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{subst.}}$$

$$\begin{aligned} x + x + 53 &= 721 \\ 2x &= 668 \\ x &= 334 \quad \xrightarrow{(1)} \quad y = 334 + 53 = 387 \end{aligned}$$

Véif: $334 + 387 = 721 \checkmark$

Rép: L'étape 1 fait 334 km et la 2^e 387.

Exercice 2.11

On construit des cubes et des pyramides à base carrée en utilisant une allumette par arête. On a construit 11 solides avec 116 allumettes. Combien y en a-t-il de chaque sorte ?

Soit x le nbre de cubes
et y " " pyramides

$$\begin{cases} x+y = 11 \\ 12x + 8y = 116 \end{cases} \Rightarrow x = 11-y \quad \text{subs.}$$

$$\Rightarrow 12(11-y) + 8y = 116$$

$$132 - 12y + 8y = 116$$

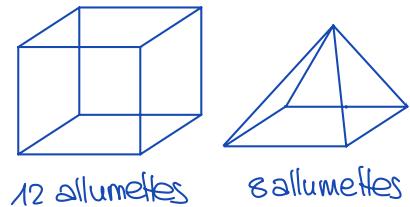
$$-4y = -16$$

$$y = 4$$

$$\Rightarrow x = 11-4 = 7$$

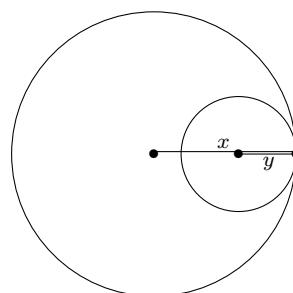
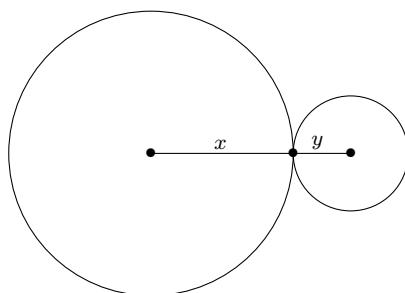
Vérif: $12 \cdot 7 + 8 \cdot 4 = 84 + 32 = 116 \checkmark$

Rép: Il y a 7 cubes et 4 pyramides

**Exercice 2.12**

La distance qui sépare les centres de deux cercles tangents extérieurement est de 6,6 cm. Si l'on déplace le petit cercle jusqu'à ce qu'il soit tangent intérieurement au grand cercle, la distance entre les deux centres n'est plus que de 2,8 cm. Calculer la longueur des rayons des deux cercles :

Posons : x = rayon du grand cercle [cm] et y = rayon du petit cercle [cm]



Exercice 2.13

On coule 80 pièces en fonte, les unes de 48 kg, les autres de 36 kg. La masse totale de toutes les pièces étant de 3'036 kg, déterminer le nombre de pièces de chaque espèce.

Soit x le nombre de pièces de 48 kg
et y " " " 36 kg

$$\begin{cases} x+y = 80 \\ 48x+36y = 3'036 \end{cases} \Rightarrow x = 80-y$$

\leftarrow subst.

$$\begin{aligned} 48(80-y) + 36y &= 3'036 \\ 3840 - 48y + 36y &= 3'036 \\ -12y &= -804 \\ y &= 67 \quad \Rightarrow x = 80-67 = 13 \end{aligned}$$

Vérif: $13 \cdot 48 + 67 \cdot 36 = 624 + 2412 = 3036 \checkmark$

Rép: Il y a 13 pièces de 48 kg et 67 pièces de 36 kg

Exercice 2.14

Combien faut-il mélanger de vin à 6 francs le litre et de vin à 9 francs le litre pour obtenir 60 litres de vin à 8 francs le litre ?

Exercice 2.15

Une personne possède une fortune de 112'000 francs. Elle place une partie de son argent à 3,5 % et le reste à 5 % (intérêts annuels). Si elle avait placé la première partie à 5 % et la deuxième à 3,5 %, elle retirerait 35 francs d'intérêts supplémentaires par mois. Calculer la valeur des deux placements.

Exercice 2.16

Un marchand de café possède deux variétés de café : l'Esquisito et le Diavolo. En mélangeant 24 kg d'Esquisito avec 32 kg de Diavolo, il obtient un café à 16 francs le kg. S'il mélange 24 kg de Diavolo avec 32 kg d'Esquisito, le mélange revient à 15,50 francs le kg.

Quel est le prix au kg de chaque café ?

Soit x le prix du kilo d'Esquisito en francs
et y " " de Diavolo " "

1^e mélange : $24 + 32 = 56$ kilos

2^e " : $32 + 24 = 56$ kilos

$$\begin{cases} 24x + 32y = 16 \cdot 56 \\ 32x + 24y = 15,5 \cdot 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x + 32y = 896 \\ 32x + 24y = 868 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 112 \\ 8x + 6y = 217 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -3 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow & \begin{array}{rcl} -3x - 12y & = & -336 \\ 16x + 12y & = & 434 \\ \hline 7x & = & 98 \\ x & = & 14 \end{array} & \begin{array}{l} \text{subst.} \\ \text{dans (1)} \end{array} \\ & & \begin{array}{l} 3 \cdot 14 + 4y = 112 \\ 42 + 4y = 112 \\ 4y = 70 \\ y = 17,5 \end{array} \end{array}$$

Vérf : $24 \cdot 14 + 32 \cdot 17,5 = 896 \checkmark$
 $32 \cdot 14 + 24 \cdot 17,5 = 868 \checkmark$

Rép : l'Esquisito coûte 14.-/kg et le Diavolo 17,50/kg

Exercice 2.17

On coupe du lait avec de l'eau. On obtient ainsi un mélange de 15 litres pesant 15,3 kg.

La masse volumique du lait pur est de 1,03 kg/dm³.

Quelle quantité d'eau ce mélange contient-il ?

Soit x la quantité d'eau de ce mélange en l.
et y " de lait en l.

masse d'eau : x kg

masse de lait : $1,03y$ kg

$$\begin{cases} x+y = 15 \\ x+1,03y = 15,3 \end{cases} \Rightarrow x = 15-y$$

subst.

$$15-y+1,03y = 15,3$$

$$15 + 0,03y = 15,3$$

$$0,03y = 0,3$$

$$y = 10 \Rightarrow x = 15-10 = 5$$

Vérif: $5 + 10 \cdot 1,03 = 5 + 10,3 = 15,3 \quad \checkmark$

Rép. le mélange contient 5 l d'eau.

Exercice 2.18

Lors de l'impression d'une brochure, on s'aperçoit que différentes variantes sont possibles. Tout en conservant les mêmes caractères typographiques, on peut soit aérer le texte en mettant 15 lignes de moins par page, ce qui augmente la brochure de 3 pages, soit resserrer le texte en mettant 25 lignes de plus par page, ce qui diminue la brochure de 3 pages. Déterminer le nombre de lignes par page et le nombre de pages de la brochure.

Soit x le nbre de lignes par page
et y " de pages

15 lignes de moins par page : $x-15$, 3 pages de plus : $y+3$
25 " de plus " " : $x+25$, " de moins : $y-3$

nbre de lignes total : xy

$$(x-15)(y+3)$$

$$(x+25)(y-3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-15)(y+3) = xy \\ (x+25)(y-3) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 3x - 15y - 45 = xy \\ xy - 3x + 25y - 75 = xy \end{cases} \quad \begin{array}{l} |-xy + 45 \\ |-xy + 75 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 3x - 15y = 45 \\ -3x + 25y = 75 \end{cases} \quad \begin{array}{l} |1 \\ |1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 10y = 120 \\ y = 12 \end{array}$$

subst.
 \Rightarrow
dans (1)

$$3x - 15 \cdot 12 = 45$$

$$3x - 180 = 45$$

$$3x = 225$$

$$x = 75$$

Véif : $75 \cdot 12 = 900$
 $60 \cdot 15 = 900$
 $100 \cdot 9 = 900 \checkmark$

Rép: la brochure compte 12 pages de 75 lignes chacune.

2.3 Solutions des exercices

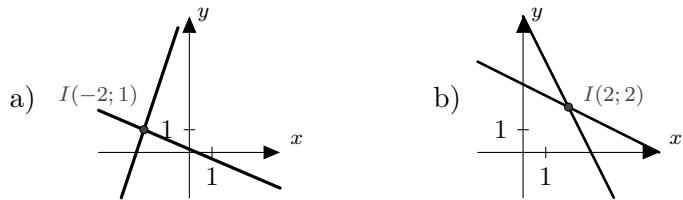
2.1 a) $S = \{(1; 3)\}$ b) $S = \{(-8; 1)\}$ c) $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; 3 \right) \right\}$ d) $S = \{(1; -1)\}$

2.2 a) $S = \{(1; 3)\}$ b) $S = \{(-8; 1)\}$ c) $S = \{(7; -6)\}$

2.3

a) $S = \{(4; -1)\}$ b) $S = \left\{ \left(\frac{11}{9}; -\frac{4}{9} \right) \right\}$ c) $S = \left\{ \left(\frac{24}{11}; -\frac{13}{11} \right) \right\}$

2.4



2.5

a) $S = \left\{ \left(\frac{1}{6}; -\frac{21}{2} \right) \right\}$ b) $S = \{(3; 2)\}$

2.6

a) $S = \{(2; 3)\}$ b) $S = \{(7; 5)\}$

2.7

a) $S = \{(1; 2)\}$ b) $S = \emptyset$

2.8

a) $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right) \right\}$ b) $S = \{(7; 10)\}$

2.9 500 ouvriers dans l'usine *A* et 250 ouvriers dans l'usine *B*.

2.10 334 km pour la première étape et 387 km pour la deuxième.

2.11 7 cubes et 4 pyramides.

2.12 Le rayon du petit cercle est de 1,9 cm ; 4,7 cm pour le grand cercle.

2.13 13 pièces de 48 kg et 67 pièces de 36 kg.

2.14 20 litres à 6 francs et 40 litres à 9 francs.

2.15 La personne a placé 70'000 francs à 3,5 % et 42'000 francs à 5 %.

2.16 L'Esquisito est à 14 francs le kg et le Diavolo à 17,50 francs le kg.

2.17 5 litres d'eau.

2.18 La brochure a 12 pages de 75 lignes.