Ex 1

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4+x^3+3x^2}{x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$ f.i. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x^2}(x^2+x+3)}{\cancel{x^2}\,1} = \lim\limits_{x \to 0} (x^2+x+3) = \underline{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$ f.i. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x-1) = -1-1 = \underline{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-9}{x^2-8x-9} = \text{"}\dfrac{72}{0}\text{"} = \underline{\infty}$

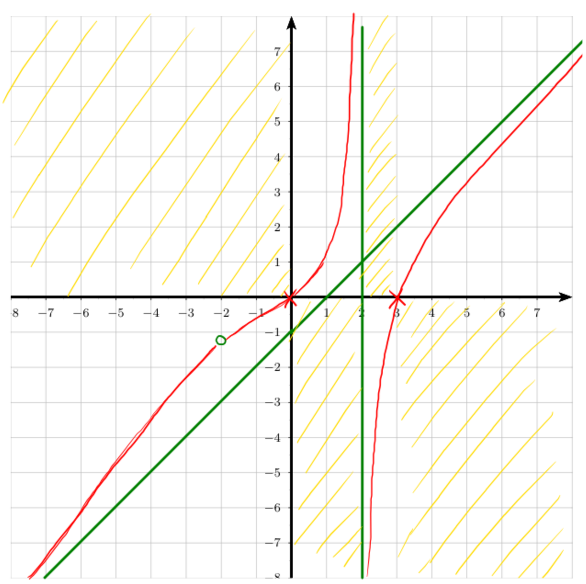
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{2x-5x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3\cancel{x^3}}{-5\cancel{x^3}} = \underline{-\dfrac{3}{5}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2+3x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}\,1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = \underline{+\infty}$

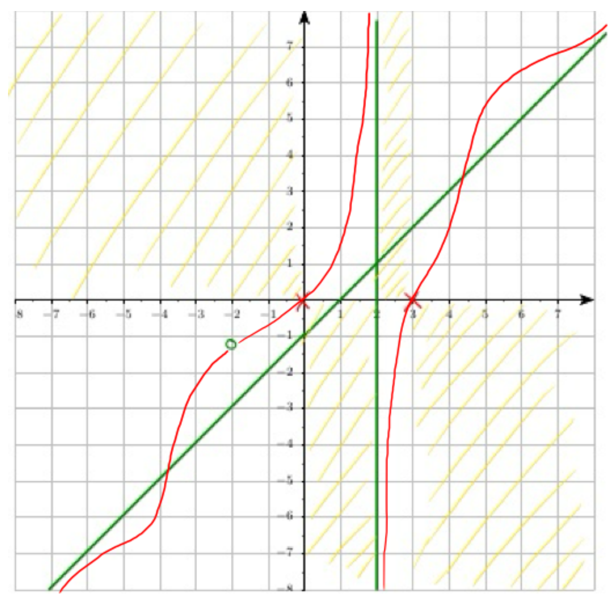
f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{3x^2-x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overset{1}{\cancel{x}}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{\infty} = \underline{0}$

Ex 2

par exemple :



ou



Ex 3

a) $$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$$

$-2 \quad 2$ ← zéros : -2 (et 2)

$3 \quad 2$ ← v.i. : 2 et 3 multiplicité 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2;3\}$

2) signe :

x		-2		2		3	
$\mathrm{sgn}(f)$	$+$	0	$-$	$\Vert$ (2)	$-$	$\Vert$	$+$

$f(1000)$: $\frac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim_{x \to 2} f(x) \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow (2;-4)$ trou

$\lim_{x \to 3} f(x) = \text{"}\frac{5}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x=3$ est une AV

AH/AO : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y=1$ est une AH

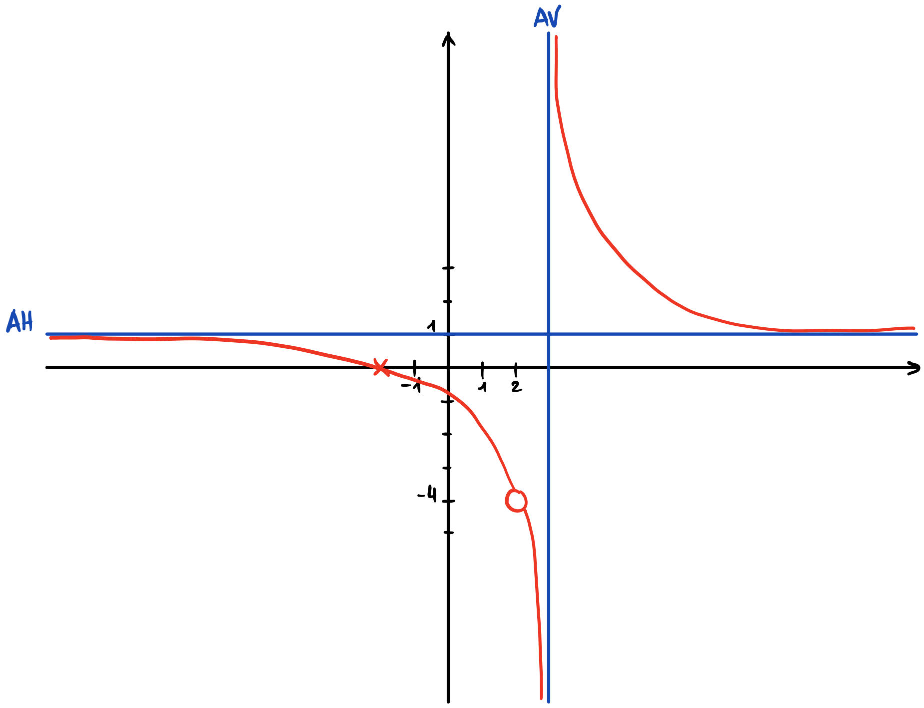
$$\delta(x) = f(x) - 1 = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} - \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} = \frac{5x-10}{x^2-5x+6} = \frac{5(x-2)}{(x-3)(x-2)}$$

← zéro : 2

← v.i. 2 et 3 (2)

		2		3	$+$
	$-$	$\Vert$ (2)	$-$	$\Vert$	
	dessous	$\Vert$	dessous	$\Vert$	dessus

4) graphe :



b) $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x+1} \overset{*}{=} \dfrac{(x-1)(x+2)(x+3)}{(x+1)^2}$ $\leftarrow$ zéros : $-3, -2$ et 1

$\leftarrow$ V.i : -1 (2)

* numérateur : zéros possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x = 1$: $1+4+1-6 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ Horner :

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

$\Rightarrow (x-1)(x^2+5x+6) = (x-1)(x+2)(x+3)$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) signe :

x		-3		-2		-1		1	
$sgn(f)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$ (2)	$-$	0	$+$

$f(1000) : \frac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{“}\dfrac{-4}{0}\text{”} = \infty$ $\Rightarrow$ $x = -1$ est une AV

AH/AO : AO car $3 = 2+1$ $(Deg(N) = Deg(D)+1)$

$x^3 + 4x^2 + x - 6$ | x^2+2x+1

- $-x^3 \mp 2x^2 \mp x$ | $x+2$
- $2x^2 \quad -6$
- $-2x^2 \mp 4x \mp 2$
- $-4x - 8$

$\Rightarrow f(x) = x+2 + \dfrac{-4x-8}{x^2+2x+1}$

$\Rightarrow$ $y = x+2$ est une AO

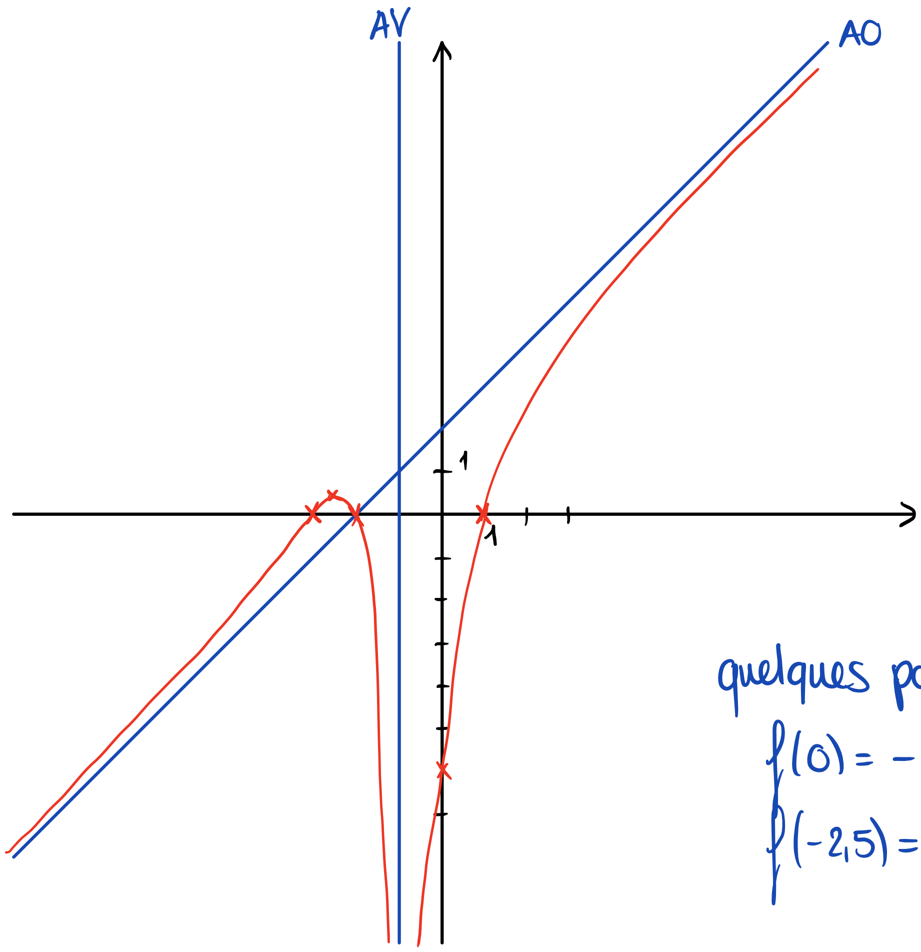
$\delta(x) = \dfrac{-4x-8}{x^2+2x+1} = \dfrac{-4(x+2)}{(x+1)^2}$ $\leftarrow$ zéro : -2

$\leftarrow$ V.i : -1 (2)

x		-2		-1	
$sgn(\delta)$	$+$	0	$-$	$\|\|$ (2)	$-$
position de f p.r. à AO	dessus	$\cap$	dessous	$\|\|$	dessous

coupe en $(-2 ; 0)$ $\quad y = -2+2 = 0$

4) graphe :



quelques points :

$f(0) = -6$

$f(-2{,}5) = \dfrac{0{,}875}{2{,}25} = 0{,}3\overline{8}$

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes, on demande de déterminer

- l'ensemble de définition,
- le signe,
- les équations des asymptotes éventuelles et s'il existe un trou en donner les coordonnées,
- et le graphe.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + 2x + 1}$

Exercice 4

D'une fonction rationnelle f, on donne son étude de signe (ci-dessous) et l'équation de ses asymptotes : $x = 1$ et $y = 2$

x		-1		1		4	
$sgn(f)$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

a) Vrai ou Faux ?

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ Faux 4 est un zéro pas une v.i. $(ED(f) = \mathbb{R} - \{1\})$

2) Il y a un zéro de multiplicité paire. Vrai en $x = -1$ car le signe de f est le même avant et après -1

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ Faux sinon il y aurait une AH d'équation $y = 1$

4) Le degré du numérateur et celui du dénominateur sont égaux. Vrai car il y a une AH d'équation $y = 2$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \cdot x^n}{x^n} = 2\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ Vrai car il y a une AV d'équation $x = 1$

b) D'après l'étude de signe et les équations des asymptotes, déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = +\infty$

car AV $x = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$ $(= f(4))$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ (car AH)

c) Esquisser le graphe d'une fonction f qui pourrait admettre cette étude de signe et ces asymptotes.

d) Donner une fonction f qui pourrait admettre cette étude de signe et ces asymptotes.

par exemple : $f(x) = \dfrac{2(x+1)^2(x-4)}{(x-1)^3}$ ou $\dfrac{4(x+1)^2(x-4)^3}{2(x-1)^5}$

ou $\dfrac{2(x+1)^2(x-4)}{x^3-1}$ ou ...

c) par exemple