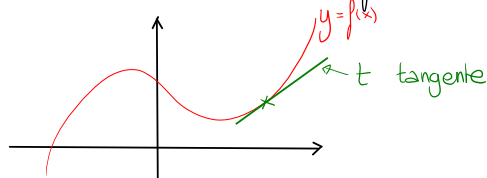


2.7 Dérivée

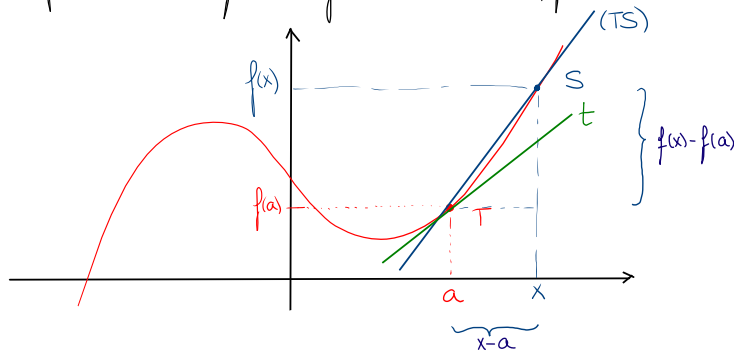
But : connaître la croissance d'une fonction

Idée :



étudier la pente de la tangente.

Prenons un point $T(a; f(a))$ fixe et $S(x; f(x))$ un autre point variable



On considère la droite (TS) : sa pente $m_{(TS)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En approchant S de T, la droite (TS) s'approche de t la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point T.

En prenant la limite quand x tend vers a , on obtient la pente de t. Cette pente est appelée le nombre dérivé de f en a , notée $f'(a)$.

Autrement dit

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Interprétation : $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point d'abscisse a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemples

1. ex 2.7.1 $f(x) = x^2$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \stackrel{0/0}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = a+a = 2a$$

$$f'(a) = 2a \quad \text{nombre dérivé}$$

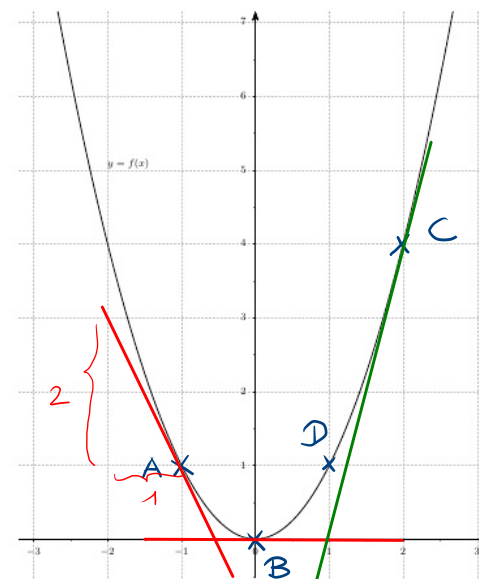
Pour $A(-1,1)$: $f'(-1) = 2(-1) = -2 = m_A$

$B(0,0)$: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 = m_B$

$C(2,4)$: $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 = m_C$

$D(1,1)$: $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 = m_D$

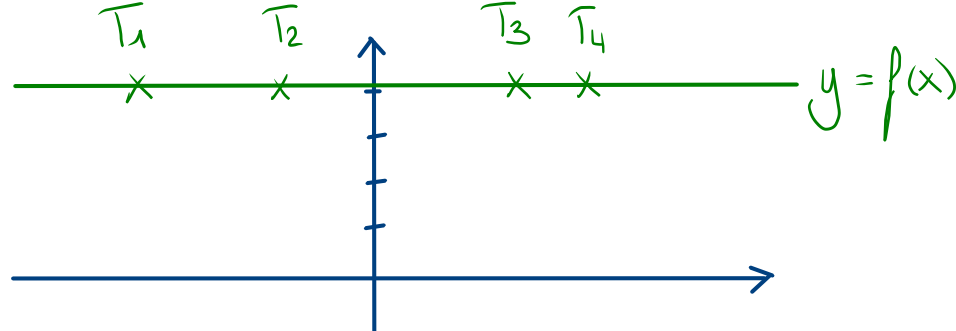
$$\Rightarrow f'(x) = 2x \quad \text{c'est la fonction dérivée de } f(x) = x^2$$



2. ex 2.7.11 a)

$$f(x) = 4$$

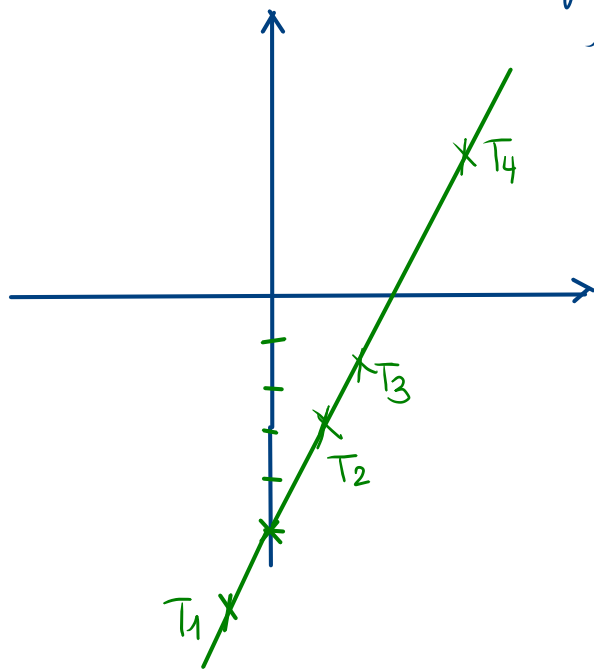
$$f'(x) = 0$$



3. ex 2.7.11 b)

$$f(x) = 2x - 5$$

$$f'(x) = 2$$



cu par calcul

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x-5) - (2a-5)}{x-a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x-2a}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{x-a} = 2$$

$$4. f(x) = 3x^2 + 5x$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(3x^2 + 5x) - (3a^2 + 5a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 5x - 3a^2 - 5a}{x - a}$$

$$\stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{3 \overbrace{(x^2 - a^2)}^{(x+a)(x-a)} + 5(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)} [3(x+a) + 5]}{\cancel{x-a}}$$

$$= 3 \underbrace{(a+a)}_{2a} + 5 = 6a + 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x + 5$$

$$5. f(x) = x^3$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2 + ax + a^2)}{\cancel{x-a}}$$

$$= a^2 + a \cdot a + a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$6. f(x) = x^4$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = (a^2 + a^2)(a+a)$$

$$= 2a^2 \cdot 2a = 4a^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3$$