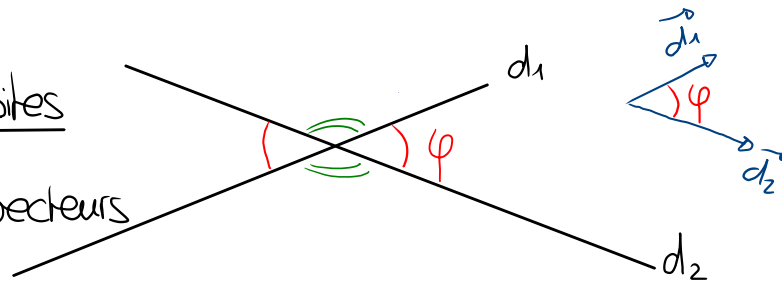


2. Questions métriques

2.1 Angle aigu entre deux droites

= angle aigu entre les vecteurs directeurs.



ex 3.22

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad d_1 : 2y &= 3x + 7 & \left\{ \quad d_2 : 2x + 3y &= 5 \right. \\ \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 &= 0 & \left\{ \quad \Leftrightarrow 2x + 3y - 5 &= 0 \right. \\ \vec{n}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \quad \vec{n}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

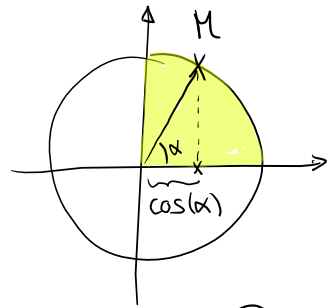
$$\begin{aligned} \text{c)} \quad d_1 : x &= 2y + 4 & \left\{ \quad d_2 : 2x - 4y + 3 &= 0 \right. \\ \Leftrightarrow x - 2y - 4 &= 0 & \left\{ \quad \end{aligned}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_1$$

$$\Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \varphi = 0^\circ, \text{ angle entre } \vec{d}_1 \text{ et } \vec{d}_2$$

Pour calculer l'angle entre deux vecteurs on utilise la forme trigonométrique du produit scalaire : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$ avec $0 \leq \varphi \leq 180$
 $\Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$



Pour $0 \leq \alpha \leq 90$, $\cos(\alpha)$ est positif.

$\Rightarrow$ Pour obtenir l'angle aigu, on doit obtenir un résultat positif, donc on ajoute des valeurs absolues

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{\|\vec{d}_1\| \cdot \|\vec{d}_2\|} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

Il existe également une formule avec les pentes m_1 et m_2

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

sauf si $d_1 \perp d_2$ (car $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \text{dénominateur} = 0$)

ou si d_1 ou d_2 est verticale (car $m = \infty$)

ex 3.2.2 a) et d) avec 2 formules

Ex 3.2.2

$$a) d_1 : 5x - y = 7$$

$$d_2 : 3x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 7 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 15 - 2 = 13$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2} \underbrace{\sqrt{13} \sqrt{13}}_{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{45^\circ}$$

avec pente :

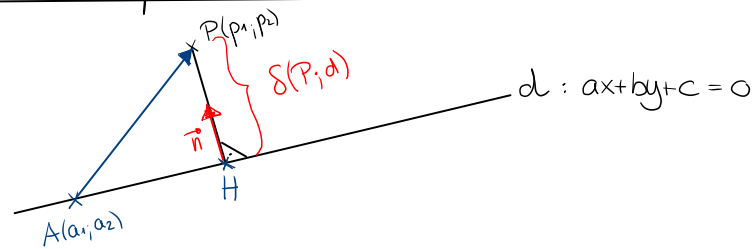
$$m_1 = -\frac{5}{-1} = 5 \quad m_2 = -\frac{3}{2} \quad \left(m = -\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{3}{2} - 5 = -\frac{13}{2}$$

$$m_1 \cdot m_2 = 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{-\frac{13}{2}}{1 + \left(-\frac{15}{2}\right)} \right| = \left| \frac{-13/2}{-13/2} \right| = 1 \Leftrightarrow \varphi = \underline{45^\circ}$$

2.2 Distance entre un point et une droite



$$\left. \begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{AH} + \vec{HP} \Leftrightarrow \vec{AH} = \vec{AP} - \vec{HP} \\ \vec{AH} &\perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AH} \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (\vec{AP} - \vec{HP}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} - \vec{HP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = \vec{HP} \cdot \vec{n}$$

$$|\vec{AP} \cdot \vec{n}| = |\vec{HP} \cdot \vec{n}| \quad \text{or} \quad \vec{HP} \cdot \vec{n} = \|\vec{HP}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\varphi) \quad \begin{array}{l} \text{avec } \varphi = 0^\circ \\ \text{ou } \varphi = 180^\circ \end{array}$$

$$= \|\vec{HP}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot (\pm 1)$$

$$= \pm \|\vec{HP}\| \cdot \|\vec{n}\|$$

$$|\vec{AP} \cdot \vec{n}| = \underbrace{\|\vec{HP}\|}_{S(P; d)} \cdot \|\vec{n}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{S(P; d) = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Avec $P(p_1, p_2)$, $d: ax+by+c=0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $A(a_1, a_2)$

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (p_1 - a_1)a + (p_2 - a_2)b \\ &= p_1a - a_1a + p_2b - a_2b \\ &= ap_1 + bp_2 - a_1a - a_2b \end{aligned}$$

$$\text{comme } A \in d : a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -aa_1 - ba_2 = -a_1a - a_2b$$

$$\Rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = ap_1 + bp_2 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{S(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$S(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exple : distance de $P(2; \frac{7}{2})$ à $d: 3x - 4y + 1 = 0$

$$S(P; d) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{7}{2} + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 14 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$