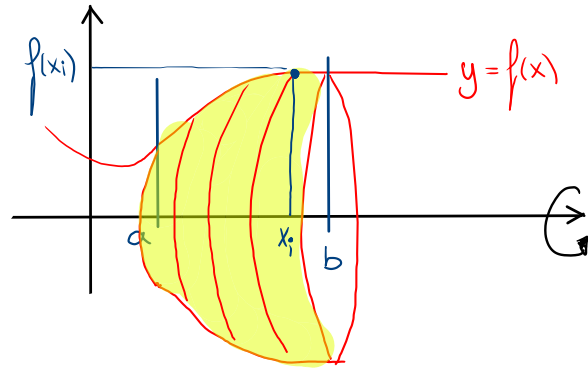


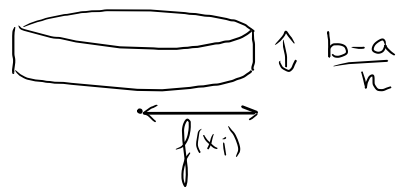
Volume

Un solide de révolution est un solide obtenu en faisant tourner autour d'un axe un domaine fermé.



L'idée : On découpe le domaine en n rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$.

Le volume du solide engendré par la rotation d'un rectangle est



$$V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} = \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

En additionnant les volumes des n cylindres et lorsque $n \rightarrow +\infty$

on obtient

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_i) \cdot \Delta x$$
$$= \int_a^b \pi f^2(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Exemples

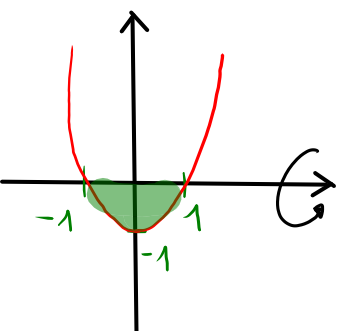
1) $f(x) = \sqrt{x}$

Volume du solide engendré par la rotation ^{autour de Ox} du domaine fermé délimité par $y=f(x)$, Ox, $x=2$ et $x=4$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_2^4 x dx = \pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^4 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \\ &= \pi (8 - 2) = \underline{6\pi} \end{aligned}$$

2) $f(x) = x^2 - 1$

..... domaine fermé délimité par $y=f(x)$ et Ox.

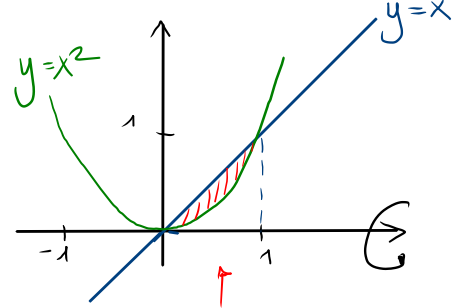


zeros: ± 1

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) \right] \\ &= \pi \left[\frac{8}{15} - \left(-\frac{8}{15} \right) \right] = \underline{\frac{16\pi}{15}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u = x^2 - 1 \\ u' = 2x \end{pmatrix}$$

3) Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$



Calculer le volume du solide de révolution

engendré par la rotation autour de Ox du domaine

$$\text{pts d'I} : x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x}(\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{x-1}) = 0$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{15} u^3}}$$

$$V = \left| \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx \right| = \left| \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx \right| \neq \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$