

Ex 2.6.1

$$a) f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

zéro : -2 et 1 (2)
 cond : $(x+3)(x-1) \neq 0$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $-3 \quad 1$ (v.i.)

$$1) \text{ED}(f) = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$$

$$2) \text{signe: } \begin{array}{c|ccccccc} x & & -3 & & -2 & & 1 & \\ \hline \text{sgn}(f) & + & || & - & 0 & + & || & + \\ & & & & & & (2) & \end{array} \quad f(\infty) = \frac{1}{1}$$

$$3) \text{AV/hou: } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{\infty}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x = -3 \text{ est une AV}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\text{il y a un trou en } (1; \frac{3}{4})}$$

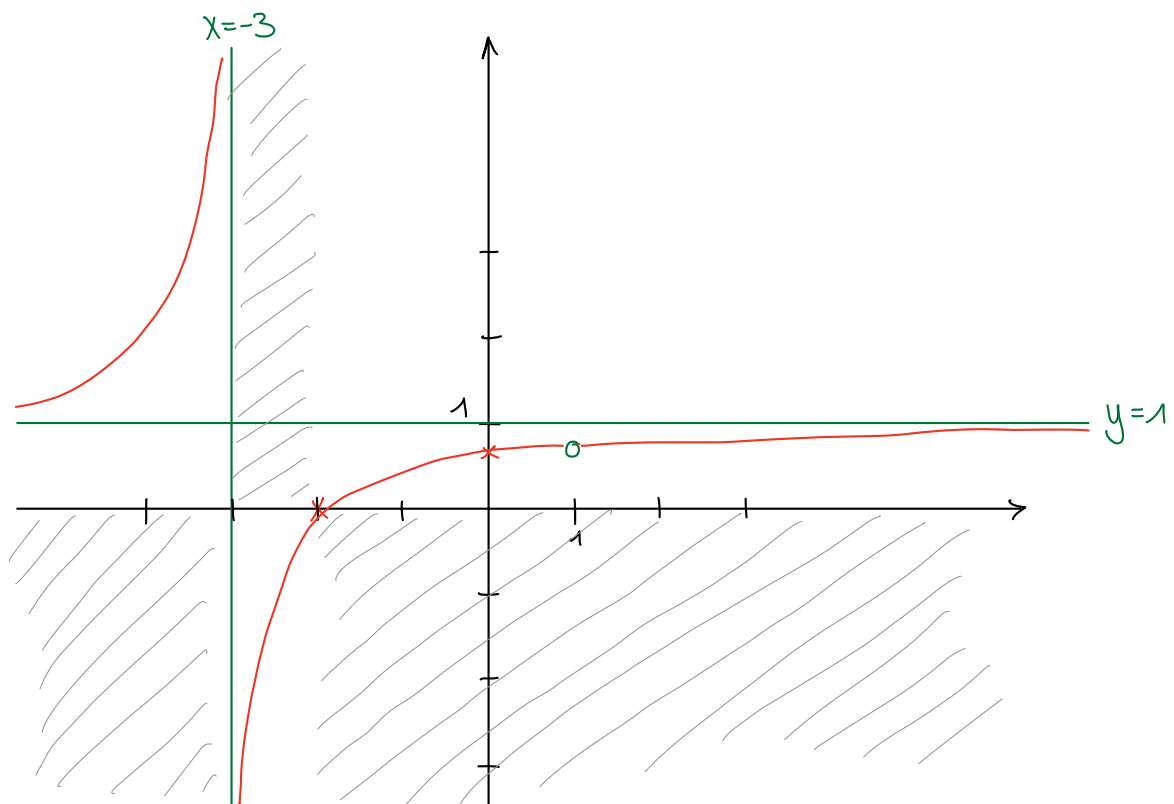
$$\text{At: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \underline{y = 1 \text{ est une At}}$$

position relative : $S(x) = f(x) - 1 = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3} = \frac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$ zéro : 1 de S
 de f p.r. à l'At. $\nwarrow$ m v.i.

x		-3		1	
$\text{sgn}(S)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$-$
				(2)	
$\text{pos}(f)$	dessus		dessous		dessus

4) graphe :

ord. à l'or. :
 $f(0) = \frac{2}{3}$



b) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2}$ $\leftarrow \Delta = -3 < 0$ pas de zéro
 $\leftarrow$ v.i. : 2

1) ED(f) = $\mathbb{R} - \{2\}$

2) signe de f :

x		2	
sgn(f)	-		+

3) AV / hou : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{7}{0} = \infty \Rightarrow$ $x=2$ est une AV

AH/AO : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow$ pas d'AH

AO car $\deg(N) = 2 = \deg(D) + 1 = 1 + 1 \checkmark$

$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ -x^2+2x \\ \hline 3x+1 \\ -3x+6 \\ \hline 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} x-2 \\ x+3 \end{array}$	$\Rightarrow f(x) = x+3 + \frac{7}{x-2}$
---	---	--

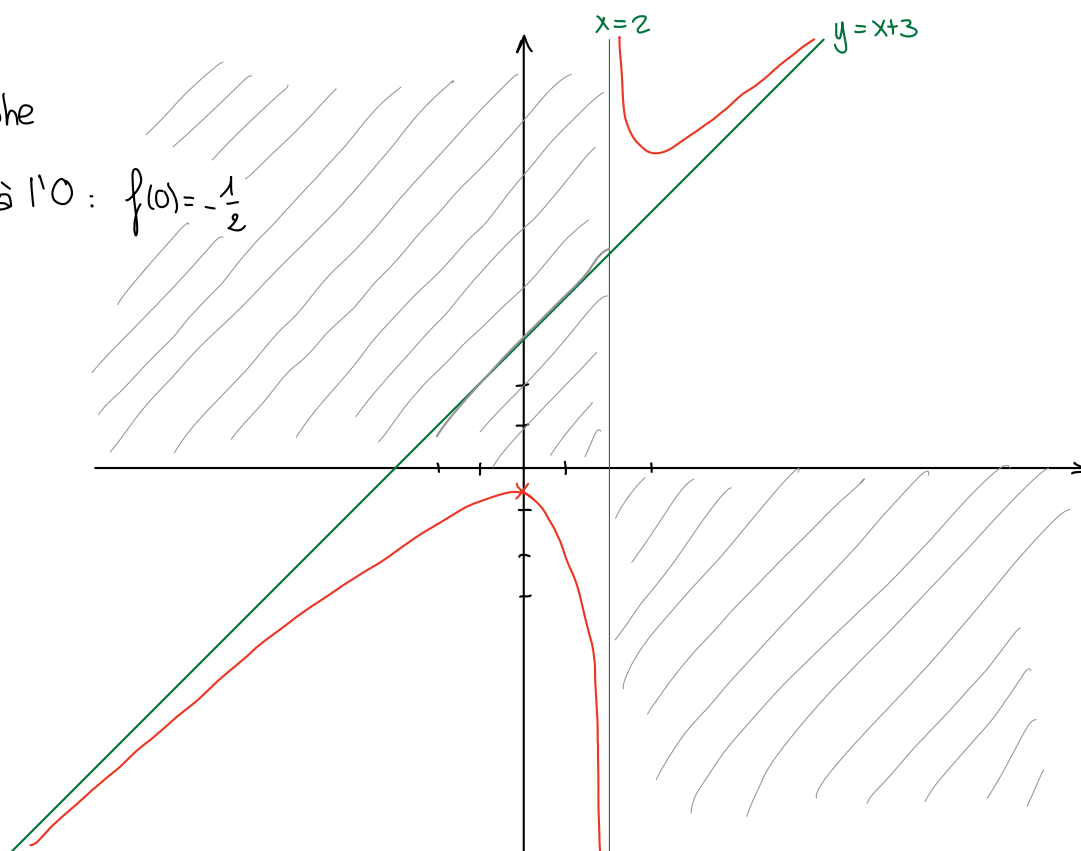
$\Rightarrow$ $y = x+3$ est l'AO et $S(x) = \frac{7}{x-2}$ $\leftarrow$ pas de zéro
 $\leftarrow$ v.i. : 2

position relative : $\begin{array}{c} \text{de } f \text{ p.r. à l'AO} \end{array}$

x		2	
sgn(S)	-		+
pos(f)	<u>dessous</u>		<u>dessus</u>

4) graphe

ord. à l'O : $f(0) = -\frac{1}{2}$



$$c) f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$1) \underline{ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}} \quad \text{cond: } (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \quad (2)$$

$$2) \text{ Signe : zéro : } 2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3$$

x		-3		-2		0	
sgn(f)	+	0	-	 (2)	-	0	+

$$\text{AV/hou: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-4}{0_+} = -\infty \Rightarrow \underline{x = -2 \text{ est une AV}}$$

$$\text{AH: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2_1} = 2 \Rightarrow \underline{y = 2 \text{ est une AH}}$$

position relative :

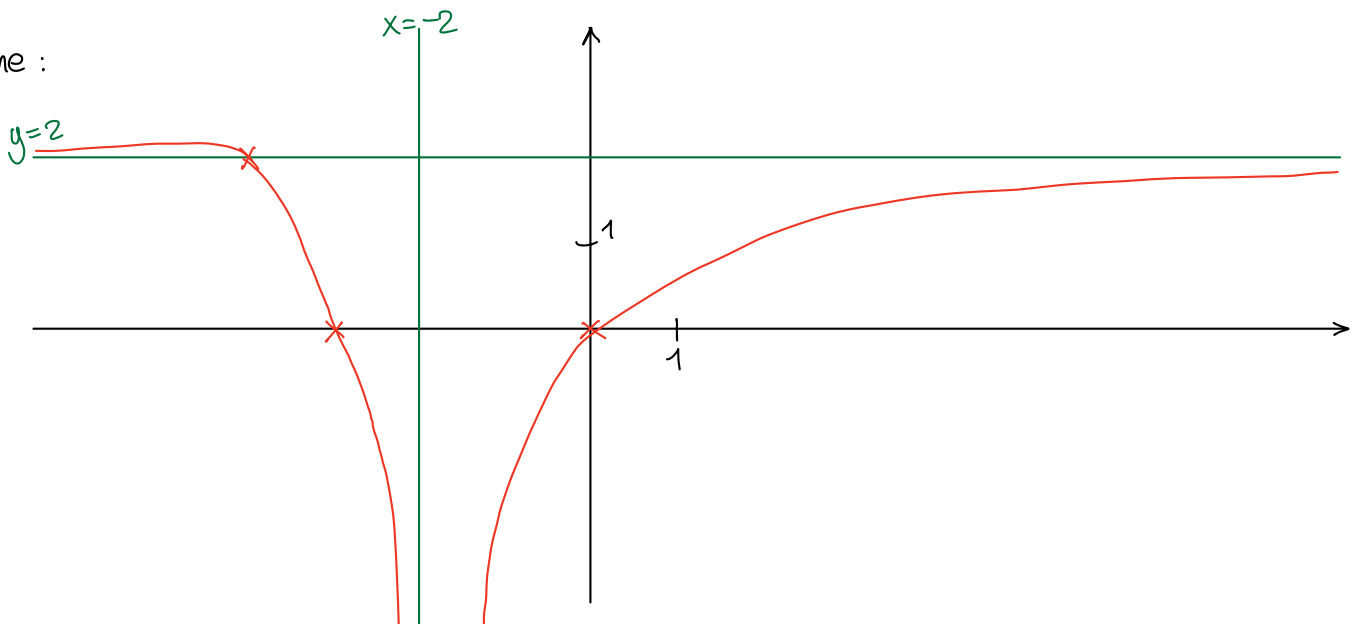
$$\begin{aligned} S(x) = f(x) - 2 &= \frac{2x^2 + 6x}{(x+2)^2} - \frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 6x - 2x^2 - 8x - 8}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-2x - 8}{(x+2)^2} = \frac{-2(x+4)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

zéro : -4
v.i. : -2 (2)

x		-4		-2	
sgn(S)	+	0	-	 (2)	-
pos(f)	<u>dessus</u>		<u>dessous</u>		<u>dessous</u>

↓
(-4; 2) car $y = 2$

4. graphe :



$$d) f(x) = \frac{x^3}{4-x^2} = \frac{x^3}{(2-x)(2+x)} \quad \begin{array}{l} \text{Zeró : } 0 \quad (3) \\ \text{v.i. : } \pm 2 \end{array}$$

1) ED(f) = $\mathbb{R} - \{ \pm 2 \}$

2) signe

x	-2	0	2
$\text{sign}(f)$	+	0	-

3) AV/hou : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-8}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x = -2 \text{ est une AV}}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{8}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x=2 \text{ est une AV}}$$

Alt/AO : AO car $\deg(N) = 3$ et $\deg(D) = 2$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 + 4x \\ \hline 4x \end{array} \quad \begin{array}{r} -x^2 + 4 \\ -x \\ \hline \end{array} \Rightarrow f(x) = -x + \underbrace{\frac{4x}{4-x^2}}_{=g(x)}$$

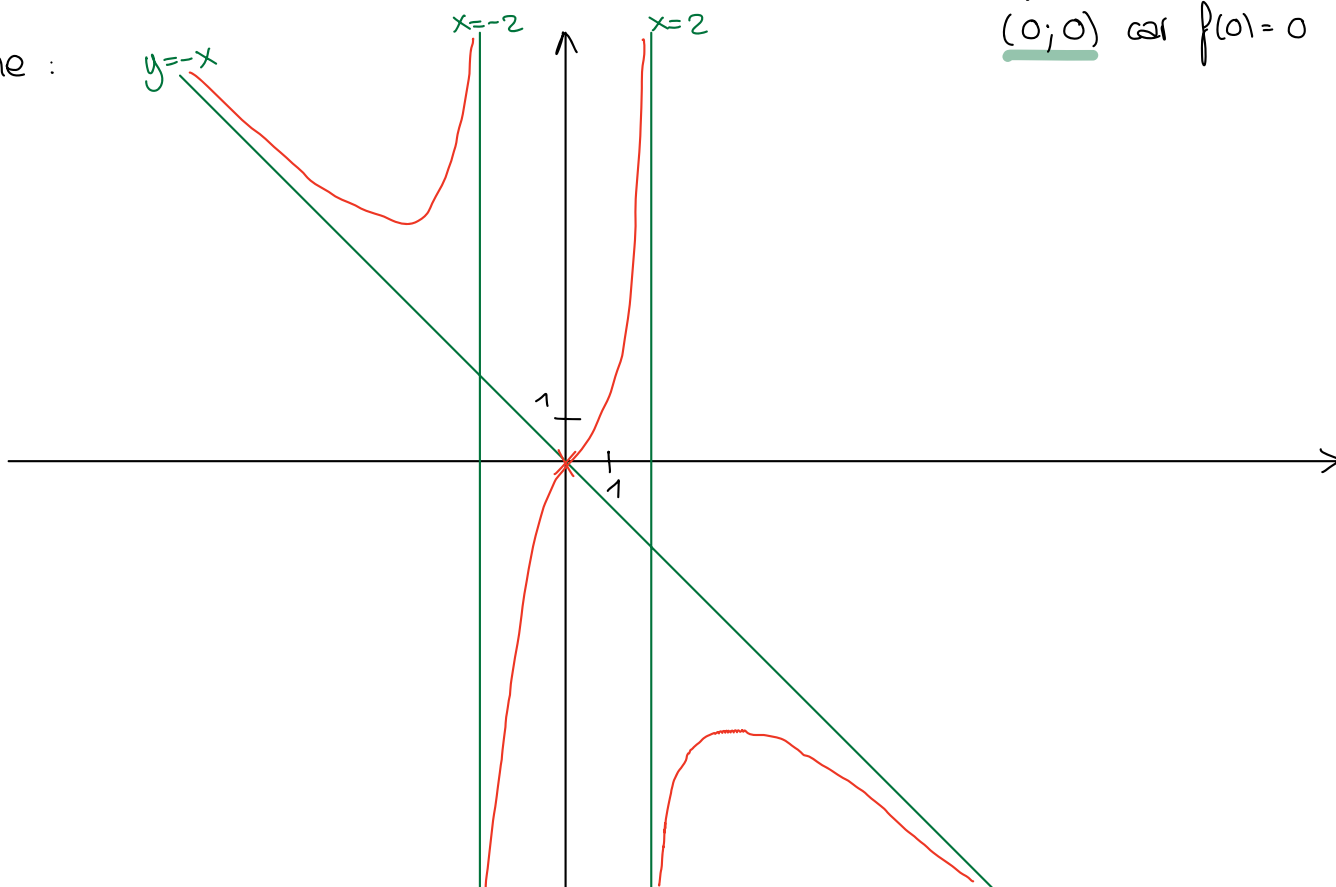
$\Rightarrow AO : y = -x$ et

x	-2	0	2
$\text{sgn}(f')$	$+$	$-$	$+$
$\text{pos}(f)$	<u>dessus</u>	<u>dessous</u>	<u>dessus</u>

$x=2$

$(0;0)$ car $f(0)=0$

4) graphe :



e) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$ $\leftarrow$ zéro: 0 et 4
 $\leftarrow$ v.i.: 1 et 3

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

2) signe :

x	0	1	3	4					
sgn(f)	+	0	-		+		-	0	+

3) AV/hou : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-3}{0} = \infty \Rightarrow$ $x=1$ est une AV

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-3}{0} = \infty \Rightarrow$ $x=3$ est une AV

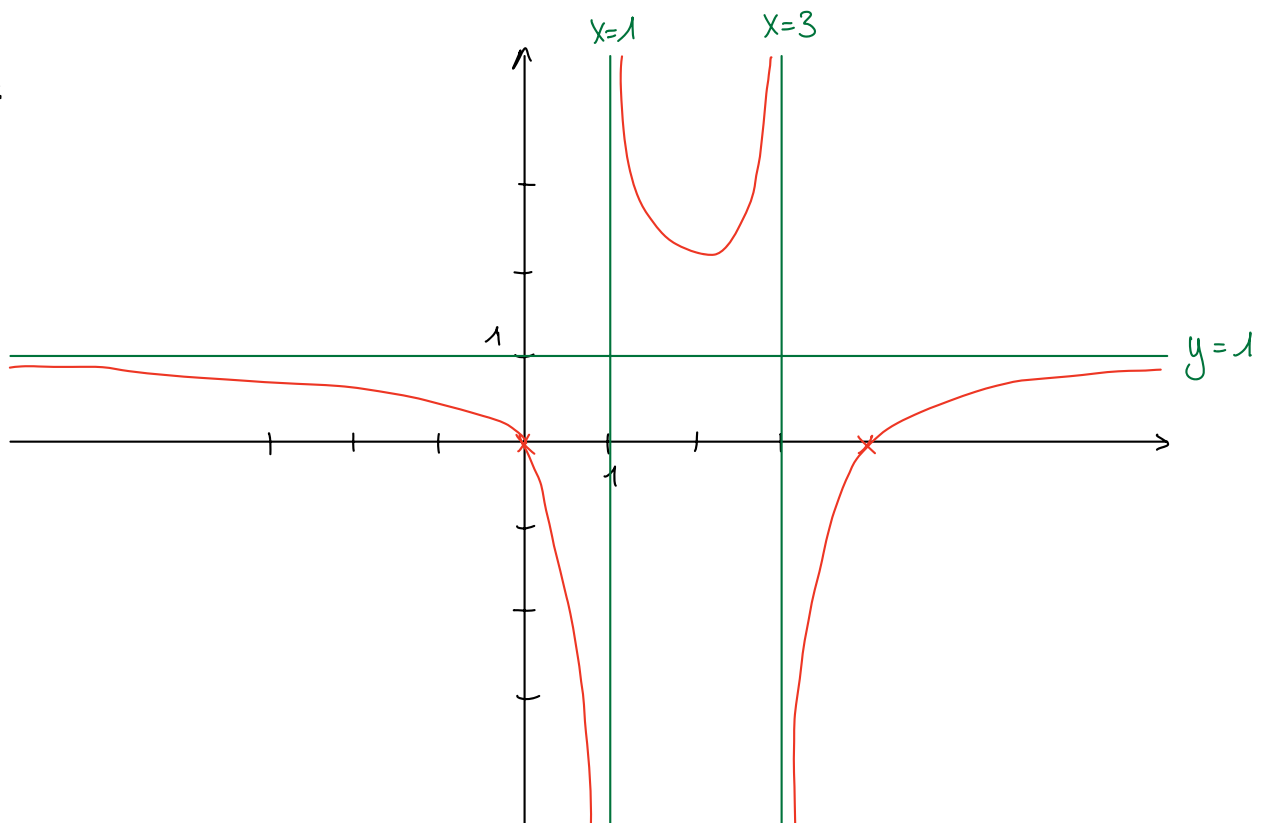
AH : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow$ $y=1$ est une AH

$S(x) = f(x) - 1 = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-3}{x^2 - 4x + 3}$ $\leftarrow$ pas de zéro
 $\leftarrow$ v.i.: 1 et 3

position relative :
de f p.r. à l'AO

x	1	3
sgn(S)	-	+
pos(f)	<u>dessous</u>	<u>dessus</u>
		<u>dessous</u>

4) graphe :



$$f) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x+2)(x-2)} \quad \text{avec Horner : } 1 \text{ est un zéro : } 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{zéro : } (x-1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 2,7 \\ -0,7 \end{cases}$$

$$1) \text{ ED}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$2) \text{ signe de } f: \begin{array}{c|cccccc} x & -2 & \sim -0,7 & 1 & 2 & \sim 2,7 \\ \hline \text{sign}(f) & - & + & - & + & - \end{array}$$

$$3) \text{ AV/hou: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-18}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x = -2 \text{ est une AV}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-2}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x = 2 \text{ est une AV}}$$

$$\text{AH/AO : AO car } \deg(N) = 3 \text{ et } \deg(D) = 2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2 \\ -x^3 + 4x \\ \hline -3x^2 + 4x + 2 \\ +3x^2 - 12 \\ \hline 4x - 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 3 + \frac{4x - 10}{x^2 - 4}$$

$$\Rightarrow \underline{y = x - 3 \text{ est une AO}}$$

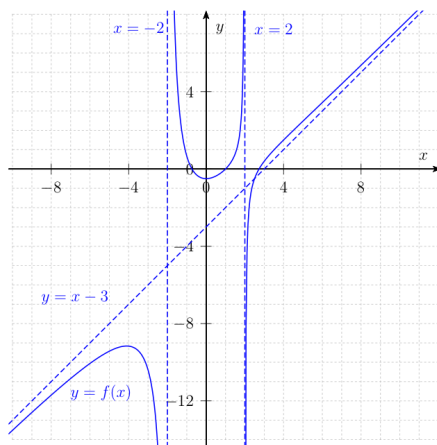
$$\text{et } S(x) = \frac{4x - 10}{x^2 - 4}$$

position relative :
de f p.r. à l'AO

$$\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 2 & 5/2 & \\ \hline \text{sign}(S) & - & + & - & + \\ \text{pos}(f) & \text{dessous} & \text{dessus} & \text{dessous} & \text{dessus} \end{array}$$

$$\downarrow \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \right) \text{ car } f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

4) graphe:



Ex 2.6.6

$$f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$$

AV : $x=0$ et $x=2 \Rightarrow 0$ et 2 sont des v.i.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x(x-2)} = \frac{\dots}{x^2 - 2x}$$

$$\Rightarrow \underline{b = -2} \text{ et } \underline{c = 0}$$

$$\text{AH : } y=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \underline{a = 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x}$$

Ex 2.6.7

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

$$\text{AV : } x=3 \Rightarrow 3 \text{ est une v.i.} \Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x-3} \Rightarrow \underline{c = -3}$$

$$\text{AO : } y = x+2 \Rightarrow ax^2 + bx \left| \begin{array}{l} x-3 \\ x+2 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{a = 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{x^2 + bx}{-x^2 + 3x} \left| \begin{array}{l} x-3 \\ x+2 \end{array} \right. \\ & \underline{(b+3)x} \\ & \hookrightarrow b+3 = 2 \Rightarrow \underline{b = -1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } f(x) &= x+2 + \frac{d}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3) + d}{x-3} \\ &= \frac{x^2 - x - 6 + d}{x-3} = \frac{ax^2 + bx}{x-3} \\ \Rightarrow & \underline{a = 1}, \underline{b = -1} \quad (\text{et } -6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3}$$

Ex 2.6.8

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$$

$$A(2; -2) : f(2) = -2 \quad \textcircled{*}$$

$$AV : x = -3 \Rightarrow -3 \text{ est une v.i.} \Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x+3} \Rightarrow \underline{d=3}$$

$$AO : y = -2x+1 \Rightarrow \begin{array}{r|l} ax^2 + bx + c & x+3 \\ -2x+1 & \end{array} \Rightarrow \underline{a=-2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} -2x^2 + bx + c & x+3 \\ +2x^2 + 6x & -2x+1 \\ \hline (b+6)x + c & \end{array} \Rightarrow b+6=1 \Leftrightarrow \underline{b=-5}$$

$$\text{on } f(x) = -2x+1 + \frac{e}{x+3} = \frac{(2x+1)(x+3)+e}{x+3}$$
$$= \frac{-2x^2 - 5x + 3 + e}{x+3} = \frac{ax^2 + bx + c}{x+3} \Rightarrow \begin{matrix} a=-2 \\ b=-5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 - 5x + c}{x+3}$$

$$\textcircled{*} \text{ Comme } f(2) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + c}{2+3} = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-18 + c}{5} = -2$$

$$\Leftrightarrow -18 + c = -10 \Leftrightarrow \underline{c=8}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 8}{x+3}$$