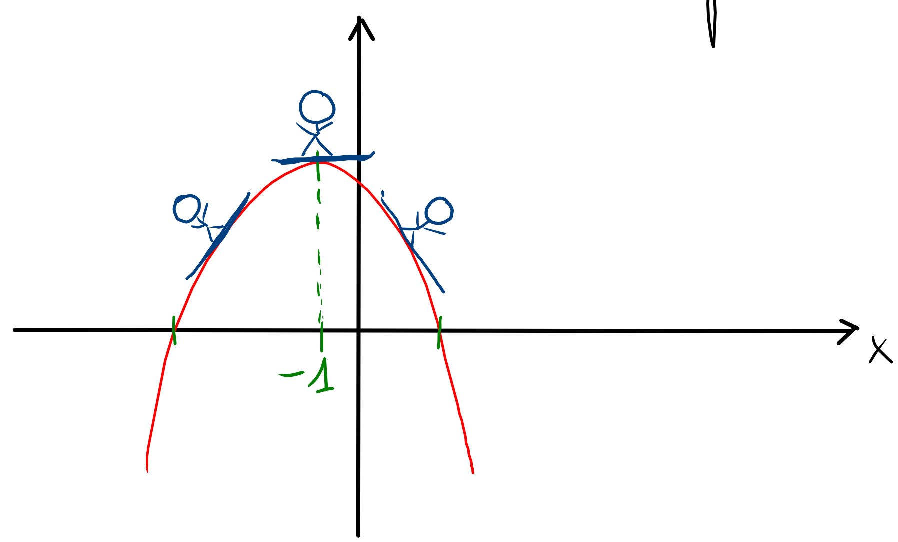
2e Application de la dérivée : la croissance d'une fonction

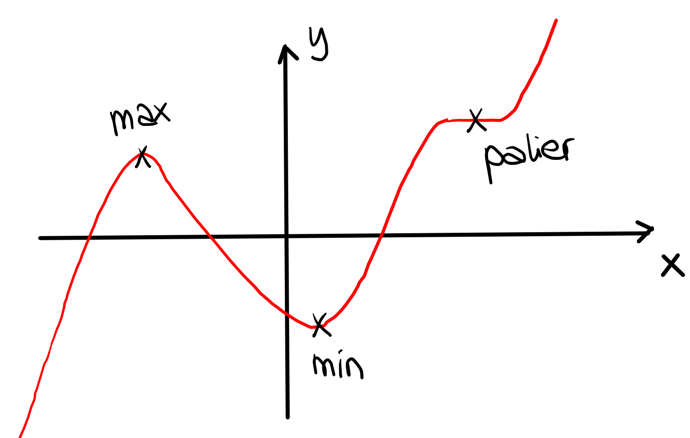
Comme la valeur de $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse a, on en déduit :

- si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle
- si $f'(x) < 0$ " " " f est décroissante " "



ici f est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et décroissante sur $]-1 ; +\infty[$
et f atteint un maximum en $x = -1$

- si $f'(x) = 0$, f admet un maximum ou un minimum ou un palier



Ainsi $\boxed{\text{étudier la croissance d'une fonction revient à étudier le signe de } f'}$

Exples : 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$

étude de croissance

- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x-3)(x+2)$

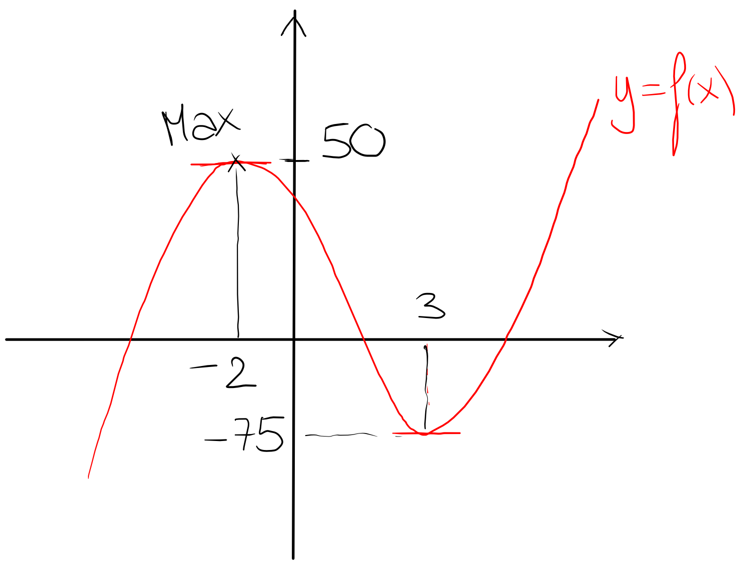
  zéros de f' : 3 $\quad$ −2

- tableau de croissance :

x		−2		3	
sgn(f')	+	0	−	0	+
crssce(f)	↗	Max	↘	min	↗

- coords des extremums : $f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + 6 = 50 \Rightarrow Max(-2\,;50)$

  $f(3) = 2\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 - 36\cdot 3 + 6 = -75 \Rightarrow min(3\,;-75)$



2) $f(x) = (x-2)(x+3)^3$

$u = x-2 \qquad v = (x+3)^3$

$u' = 1 \qquad v' = 3(x+3)^2 \cdot 1$

- $f'(x) = 1(x+3)^3 + 3(x-2)(x+3)^2$

  $= (x+3)^2[\ x+3 + 3(x-2)\ ]$

  $= (x+3)^2(\ 4x - 3)$

  zéros de f' : -3 (2) $\quad \frac{3}{4}$

- tableau de croissance :

x		−3		3/4	
f'	−	0 (2)	−	0	+
f	↘	palier	↘	min	↗

$f'(1000)$: $+ \cdot +$

- coords : $f(-3) = (-3-2)(-3+3)^3 = -5\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ palier $(-3\,;0)$

  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}-2\right)\left(\frac{3}{4}+3\right)^3 = \ldots \simeq -65{,}9 \Rightarrow \sim min\left(\frac{3}{4}\,;-65{,}9\right)$