Problèmes d'optimisation (3e application)

Nous considérons ici des problèmes de recherche qui consistent à déterminer la situation optimale d'une grandeur en fonction d'un certain nombre de contraintes liées au contexte du problème.

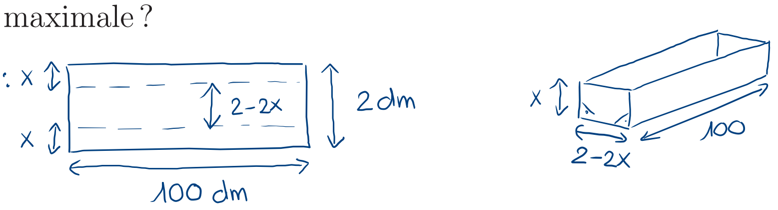
Voici une **marche à suivre** pour résoudre ce genre de problème :

- Bien lire le problème (du début à la fin, plusieurs fois), traduire les données en termes mathématiques et si possible faire un **croquis**.
- Identifier la ou les variables et exprimer la quantité **à optimiser** (à rendre maximale ou minimale) comme **fonction** de cette ou de ces **variables**.
- Si la fonction dépend de plusieurs variables, disons n variables, trouver $n-1$ équations liant ces variables. On appelle ces liens des **contraintes**.
- Utiliser ces contraintes pour déterminer la **fonction à une variable** qui permettra de réaliser l'optimisation, et déterminer l'ensemble de validité, EV, des valeurs admissibles pour cette variable.
- Déterminer les extrema (maximum ou minimum) de la fonction à optimiser, à l'aide d'une étude de croissance complète (sans oublier de contrôler ce qui se passe aux bords de l'EV).
- Répondre à la question posée et vérifier la cohérence du résultat.

Exemples :

1. On veut faire une gouttière pour border un toit de 10 m de long. Pour ce faire on utilise une longue feuille de métal de 20 cm de large en pliant les deux longs côtés et en les relevant perpendiculairement à la feuille.
   Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

Croquis :



$0 < x < 1$

variable : x (1 variable donc pas d'équation à trouver (contrainte))

fonction à optimiser : contenance max. ou volume max : $V(x) = x(2-2x)\cdot 100$

$\Rightarrow \quad V(x) = 100x(2-2x) = 200x - 200x^2 \qquad EV(V) = [0;1]$

optimisation : $V'(x) = 200 - 400x = 200(1-2x)$

zéro : $\frac{1}{2}$

x	0		$1/2$		1
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

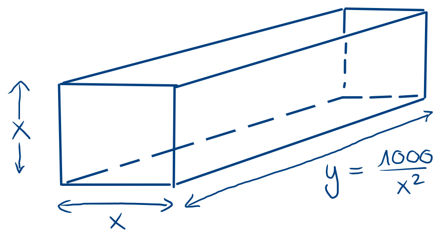
Max$\left(\frac{1}{2} ; 50\right)$

$V\left(\frac{1}{2}\right) = 100\cdot\frac{1}{2}\left(2-2\cdot\frac{1}{2}\right) = 50$

Les côtés doivent mesurer 0,5 dm = 5 cm pour une contenance maximale de 50 dm^3

2. On désire construire un aquarium en forme de parallélépipède rectangle ayant deux faces latérales opposées carrées, sans couvercle, et pouvant contenir exactement 1'000 litres d'eau.
   Quelles dimensions donner à cet aquarium afin que la surface de verre utilisée pour sa construction soit minimale ?

croquis :



variables : x et y , $x, y > 0$

(2 variables, il faut trouver une équation liant x et y)

fonction à optimiser : surface minimale : $\left(S(x;y) = 2x^2 + 3 \cdot xy \right)$

contrainte : contenance de 1000 L. : volume : $x \cdot x \cdot y = x^2 y = 1000$ (équation)

$$y = \frac{1000}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = 2x^2 + \frac{3\cancel{x} \cdot 1000}{x^{\cancel{2}}} = 2x^2 + \frac{3000}{x} \qquad ED(S) = \mathbb{R}_+^*$$

Rappel : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(k \cdot u) = k \cdot u'$

optimisation : $S'(x) = 4x - \frac{3000}{x^2}$

$$= \frac{4x \cdot x^2 - 3000}{x^2} = \frac{4x^3 - 3000}{x^2}$$

zéro de S' : $4x^3 - 3000 = 0$

$$4x^3 = 3000$$
$$x^3 = 750$$
$$x = \sqrt[3]{750} \cong 9{,}1$$

x	0		$\sim 9{,}1$	
S'	‖	$-$	0	$+$
S	‖	↘	min	↗

$\sim \min (9{,}1 ; 495{,}3)$

$S(9{,}1) \cong 495{,}3$

2e dimension

$\Rightarrow \quad y \cong \frac{1000}{9{,}1^2} = 12{,}1$ (contrainte)

Les dimensions sont environ $9{,}1 \times 9{,}1 \times 12{,}1 \text{ dm}^3$ pour une surface minimale de $495{,}3 \text{ dm}^2$ environ.