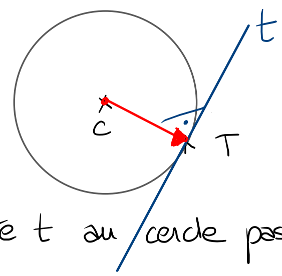
Tangente(s) à un cercle

1. passant par un point du cercle
2. de pente donnée
3. passant par un point extérieur au cercle

1. passant par un point du cercle

Soit un cercle γ de centre C et de rayon r et un point $T \in \gamma$



Pour déterminer la tangente t au cercle passant par T, on utilise le vecteur $\overrightarrow{CT}$ comme vecteur normal de la tangente t car $CT \perp t$

Exemple : $\gamma : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ et $T(6;8)$

$T \in \gamma : (6-3)^2 + (8-4)^2 = 9 + 16 = 25 \quad \checkmark$

$$\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}_t \Rightarrow 3x + 4y + c = 0$$

$$T \in t : \quad 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + c = 0$$
$$18 + 32 + c = 0$$
$$c = -50$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t : 3x + 4y - 50 = 0}}$$

Variante : $\boxed{(t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2}$ form. p. 51 formule du dédoublement

$$\gamma : (x-3)(x-3) + (y-4)(y-4) = 25$$

$$t : (6-3)(x-3) + (8-4)(y-4) = 25$$
$$3(x-3) + 4(y-4) = 25$$
$$3x + 4y - 9 - 16 = 25$$
$$\underline{\underline{3x + 4y - 50 = 0}}$$

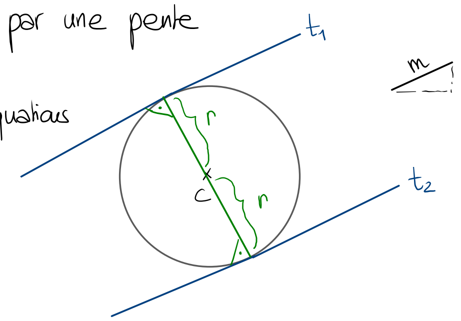
ex 2.1.16 a) → d)

2.1.17

2. de pente donnée

Soit γ un cercle de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r et une direction donnée par une pente

On veut déterminer les équations des tangentes au cercle de pente m.



Les équations de t_1 et t_2 sont de la forme

1) $\boxed{y = mx + h \iff mx - y + h = 0}$

Pour déterminer h, on va utiliser

2) $\boxed{\delta(C; t_{1,2}) = r}$

Exple : $\gamma : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 20 \Rightarrow C(-3; 2)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Déterminer les équations de tgtes au cercle de pente $m = 2$.

1) $t_{1,2} : y = 2x + h \iff 2x - y + h = 0$

2) $\delta(C; t_{1,2}) = \sqrt{20} \iff \dfrac{|2\cdot(-3) - 2 + h|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5}$

$\iff \dfrac{|-8+h|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad | \cdot\sqrt{5}$

$\iff |-8+h| = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 2\cdot 5 = 10$

$\iff -8+h = \begin{cases} 10 \iff h_1 = 10+8 = 18 \\ -10 \iff h_2 = -10+8 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow t_1 : 2x - y + 18 = 0$ et $t_2 : 2x - y - 2 = 0$

En généralisant cette méthode on obtient :

$$\boxed{(y - c_2) = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$ p.51

Si la direction de la droite est donnée par un vecteur directeur ou un vecteur normal, on utilise

1) $t_{1,2} : ax + by + c = 0$

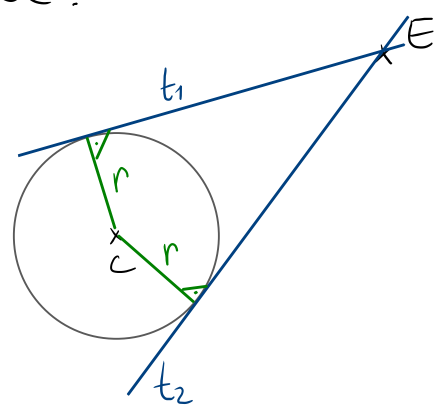
2) Pour déterminer c, on utilise : $\delta(C; t_{1,2}) = r$

ex 2.1.19 et 20

3. <u>passant par un point extérieur</u>

Soit γ un cercle de centre $C(c_1 ; c_2)$ et de rayon r

et un point $E(e_1 ; e_2)$ extérieur au cercle.



Pour déterminer les équations de t_1 et t_2

on utilise la forme

1) $\boxed{y = mx + h \iff mx - y + h = 0}$

on a deux inconnues m et h :

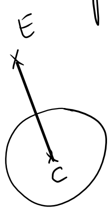
pour les déterminer

2) $\boxed{E \in t_{1,2}}$

3) $\boxed{\delta(C ; t_{1,2}) = r}$

Exple : $\gamma : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$ $\qquad C(-3;2)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$E(7;12)$



Pour déterminer si E est à l'extérieur du cercle on calcule

$$\delta(E;C) = \|\vec{CE}\| = \left\|\begin{pmatrix} 7+3 \\ 12-2 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} > \sqrt{20}$$

1) $t_{1,2} : y = mx+h \Leftrightarrow mx-y+h=0$

2) $E(7;12) \in t_{1,2} : 12 = m\cdot 7 + h \Leftrightarrow h = 12-7m$

$\Big\}\ t_{1,2} : mx-y+12-7m=0$

3) $\delta(C;t_{1,2}) = r \Leftrightarrow \dfrac{|m(-3)-2+12-7m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20} \quad \Big| \cdot\sqrt{m^2+1}$

$C(-3;2)$ $\qquad \sqrt{20}$

$$\Leftrightarrow |-10m+10| = \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow -10m+10 = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| (\ )^2$$

$$\Leftrightarrow (-10m+10)^2 = 20(m^2+1)$$

ne pas oublier le double produit

$$\Leftrightarrow 100m^2-200m+100 = \underbrace{20(m^2+1)}_{20m^2+20}$$

$$\Leftrightarrow 80m^2-200m+80 = 0 \quad \Big| \div 40$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2 = 0 \qquad \Delta = 25-16 = 9$$

$$\Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) $\Rightarrow h = 12-7m \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 12-7\cdot 2 = -2 \\ h_2 = 12-7\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{2} \end{cases}$

3) $\Rightarrow t_{1,2} : \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ \frac{1}{2}x-y+\frac{17}{2}=0 \Leftrightarrow x-2y+17=0 \end{cases}$

En généralisant on obtient la formule :

$$\boxed{e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

form. p.51

En reprenant l'expe : $C(-3;2)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $E(7;12)$

$$12 - 2 = m(7+3) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$10 = 10m \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

on isole la racine avant $(\,)^2$

$$10 - 10m = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big|\,(\,)^2$$

⋮ même équation

$$m_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

...