

# Chapitre 3

## Equations du deuxième degré

### 3.1 Théorie

#### Produits remarquables

Identités remarquables de degré 2 :

①	$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	②
③	$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	$A^2 + B^2$ n'est pas factorisable	

Montrer la 1ère identité remarquable :

$$(A + B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Exemples : développer

① a)  $(3x + 5)^2 = \underline{9x^2 + 30x + 25}$

$$A = 3x$$

$$B = 5$$

$$A^2 = 9x^2$$

$$B^2 = 25$$

$$2AB = 2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x$$

② b)  $(2x - 4y)^2 = \underline{4x^2 - 16xy + 16y^2}$

$$A = 2x$$

$$B = 4y$$

$$A^2 = 4x^2$$

$$B^2 = 16y^2$$

$$2AB = 2 \cdot 2x \cdot 4y = 16xy$$

③ c)  $(5x - 7)(5x + 7) = \underline{25x^2 - 49}$

$$A = 5x$$

$$B = 7$$

$$A^2 = 25x^2$$

$$B^2 = 49$$

ex 3.1 / 2 / 3 p. 62 ..  
3.4 / 5 p. 64

## Équations du deuxième degré

Une équation du deuxième degré en  $x$  est une équation qui peut se ramener à la forme générale suivante :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad (a \neq 0)$$

**Exemples :**

a)  $2x^2 + 3x - 4 = 0$

$a = \dots 2 \quad b = \dots 3 \quad c = \dots -4$

c)  $x^2 - 7x + 3 = 0$

$a = \dots 1 \quad b = \dots -7 \quad c = \dots 3$

b)  $-5x^2 + 7 = 0$

$a = \dots -5 \quad b = \dots 0 \quad c = \dots 7$

d)  $2x^2 - x = 0$

$a = \dots 2 \quad b = \dots -1 \quad c = \dots 0$

Équations de la forme :  $\boxed{x^2 = d}$

- 1er cas :  $d > 0$   $x^2 = d \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{d}$

Exemples :  $x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$S = \{-3; 3\}$

$S = \{\pm 3\}$

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

$S = \{\pm\sqrt{5}\}$

- 2ème cas :  $d = 0$   $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemple :  $x^2 - 5x = 7x - 12x$

$x^2 - 5x = -5x$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow$   $S = \{0\}$

- 3ème cas :  $d < 0$   $x^2 = d$  Impossible!

Exemple :  $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

Impossible car un carré ne peut pas être négatif  $\Rightarrow$   $S = \emptyset$

## Résolution par factorisation

Rappel :

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \xrightarrow{\text{factoriser}} \quad (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\quad \xleftarrow{\text{développer}} \quad x^2 + x - 4x - 4 = 0$$

**Factoriser = Mettre sous forme de produits**

Puis on utilise la règle du produit nul, afin de définir la/les solutions :

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

*Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs le soit.*

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x - 4 = 0 \\ x = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ x + 1 = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

$$S = \{-1; 4\}$$

Nous allons étudier 3 méthodes de factorisation :

- Mise en évidence
- Produits remarquables
- Trinôme unitaire du second degré

### Mise en évidence

La mise en évidence consiste à trouver les éléments communs à tous les monômes et à les mettre en évidence. C'est l'opération inverse de la distributivité :

**Distributivité :**  $2x(3x - 5) = 6x^2 - 10x$

**Mise en évidence :**  $6x^2 - 10x = 2x(3x - 5)$

**Exemples :** résoudre les équations suivantes

a)  $6x^2 - 10x = 0$

$$2x(3x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ 2x = 0 \quad 3x - 5 = 0 \\ x = 0 \quad 3x = 5 \\ \quad \quad x = \frac{5}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$$

b)  $3x^2 = 9x$

Commencer par = 0

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ 3x = 0 \quad x - 3 = 0 \\ x = 0 \quad \quad x = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \{0; 3\}$$

c)  $6x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 + 1)$   
 $6x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + 2$   
 $4x^2 - 4x = 0$   
 $4x(x-1) = 0$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $4x=0 \quad x-1=0$   
 $x=0 \quad x=1$   
 $\Rightarrow S = \{0; 1\}$

ex 3.7

d)  $\frac{1}{4}x^2 = \frac{7}{5}x \quad | \cdot 20$   
 $5x^2 = 28x$   
 $5x^2 - 28x = 0$   
 $x(5x-28) = 0$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $0 \quad 5x-28=0$   
 $5x = 28$   
 $x = \frac{28}{5}$   
 $\Rightarrow S = \{0; \frac{28}{5}\}$

**Produits remarquables**

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$	$A^2 + B^2$ n'est pas factorisable

**Exemples :** résoudre les équations suivantes

a)  $x^2 + 6x + 9 = 0$   
 $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x \checkmark$   
 $(x+3)^2 = 0$   
 $x+3=0$   
 $x=-3$   
 $\Rightarrow S = \{-3\}$

d)  $x^2 + 100 = 0$  pas factorisable  
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 nbre positif + nbre positif  $\neq 0$   
 $S = \emptyset$

b)  $x^2 - 10x + 25 = 0$   
 $2AB = 2 \cdot x \cdot 5 = 10x \checkmark$   
 $(x-5)^2 = 0$   
 $x-5=0$   
 $x=5$   
 $S = \{5\}$

e)  $x^2 = -20(x+5)$   
 $x^2 = -20x - 100$   $\triangle$  commencer par =0  
 $x^2 + 20x + 100 = 0$   
 $(x+10)^2 = 0$   
 $x+10=0$   
 $x=-10$   
 $\Rightarrow S = \{-10\}$

c)  $x^2 - 36 = 0$   
 $(x+6)(x-6) = 0$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $x+6=0 \quad x-6=0$   
 $x=-6 \quad x=6$   
 $\Rightarrow S = \{\pm 6\}$

ex 3.8

**Trinôme unitaire du second degré**

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha \cdot x + \beta \cdot x + \alpha \cdot \beta = x^2 + (\alpha + \beta) \cdot x + \alpha \cdot \beta$$

Il faut que  $\alpha \cdot \beta = c$  et que  $\alpha + \beta = b$ . On trouve  $\alpha$  et  $\beta$  par tâtonnement.

**Exemple :**  $x^2 + 4x - 21 =$

Il faut trouver deux nombres entiers  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $x^2 + 4x - 21 = (x + \alpha)(x + \beta)$ .

Les deux conditions à poser sont :  $\alpha \cdot \beta = -21$  et  $\alpha + \beta = +4$ .

On cherche, par tâtons, tous les produits de deux entiers qui donnent  $-21$  et on regarde si leur somme vaut  $+4$  :

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \cdot \beta = -21$	$\alpha + \beta = +4$
1	-21	-21	$1 + (-21) = -20 \neq +4$
-1	21	-21	$-1 + 21 = 20 \neq +4$
3	-7	-21	$3 + (-7) = -4 \neq +4$
-3	7	-21	$-3 + 7 = 4$ <b>OK!</b>

Donc  $\alpha = -3$  et  $\beta = 7$

Donc  $x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7)$

**Exemples :** résoudre les équations suivantes

a)  $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$\downarrow$              $\downarrow$   
 -3            5

$S = \{-3; 5\}$

$S: -2$

$P: -15$

$3 \text{ et } -5 \Rightarrow 3 - 5 = -2 \checkmark$

b)  $x^2 + 7x + 10 = 0$

$$(x+2)(x+5) = 0$$

$\downarrow$              $\downarrow$   
 -2            -5

$S = \{-2; -5\}$

$S: 7$

$P: 10$

$2 \text{ et } 5 \Rightarrow 2 + 5 = 7 \checkmark$

$\triangle$  pas unitaire c)  $2x^2 + 2x - 40 = 0 \quad | \div 2$

$x^2 + x - 20 = 0$

$$2(x+5)(x-4) = 0$$

$\downarrow$              $\downarrow$   
 -5            4

$\Rightarrow S = \{-5; 4\}$

$S: 1$

$P: -20$

$5 \text{ et } -4 \Rightarrow 5 - 4 = 1 \checkmark$

## Formule générale

Lorsque la factorisation n'est pas possible, ou s'avère trop difficile, on utilise le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Trois cas sont alors possibles :

$\Delta < 0$	aucune solution	-	$S = \emptyset$
$\Delta = 0$	une solution (double)	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
$\Delta > 0$	deux solutions	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$S = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

**Exemples** : résoudre les équations suivantes

a)  $2x^2 - x - 3 = 0$

$a=2$   $b=-1$   $c=-3$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) \\ &= 1 + 24 = 25 > 0 \Rightarrow \text{2 sol.} \end{aligned}$$

positif

$\sqrt{\Delta} = 5$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} + \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ - \frac{4}{4} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{2}, -1 \right\}$

b)  $3x^2 + 4x + 5 = 0$

$a=3$   $b=4$   $c=5$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 16 - 60 = -44 < 0 \end{aligned}$$

négatif

$\Rightarrow$  aucune solution

$\Rightarrow S = \emptyset$

c)  $4x^2 - 24x + 36 = 0 \quad | :4$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$a=1$   $b=-6$   $c=9$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\ &= 36 - 36 = 0 \Rightarrow \text{1 sol.} \end{aligned}$$

nul

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow S = \{3\}$

ou sans formule

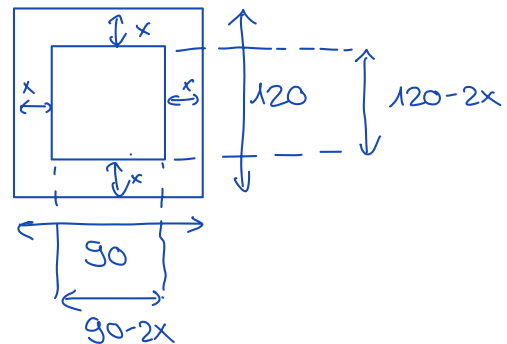
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ \downarrow & \\ 3 & \end{aligned}$$

## Problème

Une peinture et son cadre forment un rectangle de 90 cm par 120 cm.

Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, déterminer la largeur du cadre :

Soit  $x$  la largeur du cadre



$$\text{Aire totale : } 90 \cdot 120 = 10'800 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire de la toile peinte : } (90-2x)(120-2x) = \frac{10'800}{2} = 5'400$$

↙ la moitié de l'aire totale

$$10'800 - 180x - 240x + 4x^2 = 5'400$$

$$4x^2 - 420x + 10'800 = 5'400$$

$$4x^2 - 420x + 5'400 = 0 \quad | :4$$

$$x^2 - 105x + 1350 = 0$$

$$a=1 \quad b=-105 \quad c=1350$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-105)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1350$$

$$= 11'025 - 5'400 = 5625 = 75^2$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{105 \pm 75}{2} = \begin{cases} \frac{180}{2} = 90 \\ \frac{30}{2} = 15 \end{cases} \quad \leftarrow \text{trop grand pour ce prob.}$$

⚠ vérifiez si les réponses sont plausibles

⇒ le cadre a une largeur de 15 cm