

Combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des différentes méthodes qui permettent de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini vérifiant une propriété donnée, elle permet de répondre à des questions telles que : "Combien de nombres différents de 4 chiffres peut-on former ?" ou "Dans une classe de 24 élèves, on doit élire deux délégués de classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?"

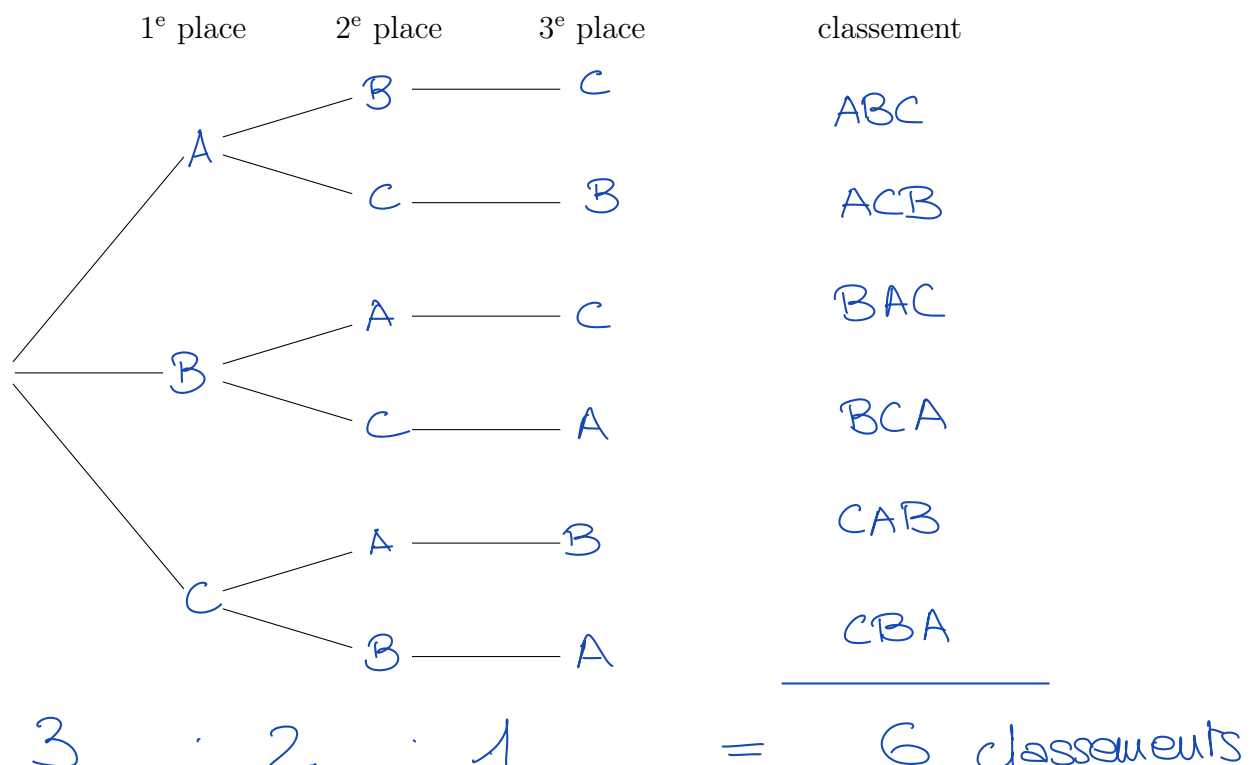
La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

1. Principes fondamentaux

Exemple d'introduction

Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C.

Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes. On peut illustrer ce raisonnement par un diagramme en arbre.



On remarque que le nombre de possibilités de classement est le produit du nombre de possibilités d'attribuer la première place, par le nombre de possibilités d'attribuer la deuxième place (après que la première place a été attribuée), par le nombre de possibilités d'attribuer la troisième place (les deux premières étant déjà fixées).

Le raisonnement ci-dessus illustre la règle générale suivante, que nous utiliserons comme axiome fondamental :

Le principe de multiplication :

Si un premier choix peut être effectué de n_1 manières différentes, puis un second choix peut être effectué de n_2 manières différentes, puis un troisième choix peut être effectué de n_3 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à un k -ième choix qui peut être effectué de n_k manières différentes.

Alors l'ensemble de tous ces choix peut être effectué de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ manières différentes.

Remarques :

1. L'analyse combinatoire n'est pas l'énumération de toutes les possibilités (souvent long et fastidieux) mais bien le dénombrement de celle-ci par un calcul.
2. Le plus souvent les arbres sont gigantesques, donc difficilement réalisables. On leur préférera souvent un modèle de "placement" en indiquant le nombre de possibilités en dessous.

Dans l'exemple d'introduction, on constate que l'on peut dénombrer

Soit par rapport au classement :

$$\begin{array}{ccc} 1^e & 2^e & 3^e \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} = 6$$

Soit par rapport à l'équipe :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} = 6$$

Ce ne sera pas toujours le cas. Il s'agira alors de choisir le bon placement.

Exemples

1. Une classe se compose de $\underbrace{12 \text{ filles et } 9 \text{ garçons}}_{21 \text{ élèves}}$. De combien de façons peuvent être choisis un président de classe, un trésorier et un secrétaire, si le trésorier doit être une fille, le secrétaire un garçon, et si un étudiant ne peut exercer plus d'une charge ?

$$\begin{array}{c} \text{P} \quad \text{T} \quad \text{S} \\ \hline 19 \cdot 12 \cdot 9 = 2052 \text{ façons} \end{array}$$

$\begin{array}{c} 21-2 \\ \uparrow \uparrow \\ 1T \text{ et } 1S \end{array}$
 (commencer par T et S puis P)

De manière général, il faut commencer par les choix les plus restrictifs et continuer par ordre décroissant de sévérité.

2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents, si ces nombres doivent être des multiples de 5 ?

On doit distinguer ceux qui se terminent par 0 de ceux qui se terminent par 5

$$\begin{array}{r} \text{10 chiffres} \rightarrow \overline{} \overline{} \overline{} \overline{} \frac{5}{1}} = 448 \\ \text{moins 2} \\ \text{chiffres: 0 et 5} \\ \overline{} \overline{} \overline{} \overline{} \frac{0}{1}} = 504 \\ \hline 952 \text{ nbres} \end{array}$$

Le principe d'addition :

Dans certaines situations, il est nécessaire de faire une décomposition en plusieurs cas qui s'excluent mutuellement. Il faut alors dénombrer les différents cas puis les additionner.

On compte 3 méthodes de dénombrement : les permutations, les arrangements et les combinaisons.

ex 3.1.1 $\rightarrow 4$

2. Les permutations

Exemples d'introduction

1. Combien de codes de 3 lettres peut-on former avec les lettres A, B et C en n'utilisant qu'une seule fois chaque lettre ?

$$\overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 6 \text{ codes}$$

2. Combien de codes de cadenas à 10 chiffres peut-on former en n'utilisant qu'une seule fois chaque chiffre ?

$$\overline{10} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \dots \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 3'628'800 \text{ codes}$$

Définition :

On appelle **n factorielle** ($n \in \mathbb{N}^*$) et l'on note $n!$ la fonction définie par

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ si } n \neq 0$$

Par convention, on définit $0! = 1$

Remarque : On trouve sur les calculatrices la fonction $\boxed{x!}$.

$$\boxed{2nd} \boxed{3}^{x!}$$

Exemples

$$1. 5! = 120$$

$$2. 15! \approx 1,31 \cdot 10^{12}$$

$$3. \frac{70!}{67!} = \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \cancel{67} \cdot \cancel{66} \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{67} \cdot \cancel{66} \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = 70 \cdot 69 \cdot 68 = 328'440$$

4. Combien de plans de classe peut-on faire pour placer les 26 élèves de la classe s'il y a exactement 26 places à disposition ?

$$26! \approx 4,03 \cdot 10^{26} \text{ plans}$$

trop grand
ne se
calcule
pas à
la main

Définition :

On dispose de n objets. On appelle **permutation** une disposition ordonnée des n objets. On distingue des permutations

- **sans répétition** : tous les objets sont distincts. On note P_n le nombre de ces permutations.
- **avec répétitions** : lorsqu'il y a des objets indiscernables parmi la collection. On note $\overline{P}_n(r_1; \dots; r_k)$ le nombre de permutations de n objets avec répétitions où $r_1, \dots, r_k$ désignent le nombre d'objets identiques.

Remarques :

1. Tous les objets sont utilisés (autant de places que d'objet dans le modèle "placement").
2. L'ordre de disposition est important.

Exemples

1. Combien d'anagrammes du mot $\overbrace{\text{GYMNASE}}^{7 \text{ lettres}}$ peut-on former ?

$$\overline{7} \cdot \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = P_7 = 7! = 5'040 \text{ anagrammes}$$

2. Même question avec le mot $\overbrace{\text{PROFESSIONS}}^{11 \text{ lettres}}$.

$$\overline{11} \cdot \overline{10} \cdot \dots \cdot \overline{1} = 11!$$

Mais comme il y a 3 fois la lettre S, et que leur permutation ne modifie pas le mot, il faut diviser par $3!$ pour enlever ces mots identiques.

De même avec les 2 lettres O.

$$\text{Ainsi on obtient } \frac{11!}{3! \cdot 2!} = \overline{P}_{11}(3; 2) = 3'326'400 \text{ anagrammes}$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

C'est le principe de multiplication.

$$\overline{P}_n(r_1; r_2; \dots; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

Justification comme dans l'exemple précédent.

Exemple

Un libraire possède, parmi ses livres, 5 livres de maths, 3 livres de chimie et 6 livres de physique.

1. De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère s'ils sont tous différents ?

$$P_{14} \approx 8,72 \cdot 10^{10}$$

2. Même question mais les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres.

$$\underbrace{\text{Math.}}_{5!} \cdot \underbrace{\text{Ch.}}_{3!} \cdot \underbrace{\text{P}}_{6!} \cdot 3! = 3'110'400$$

↑
permutation des 3 sujets

3. De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère si les 5 livres de maths sont identiques, les 3 livres de chimie sont identiques et les 6 livres de physique également ?

$$\overline{P_{14}(5, 3, 6)} = \frac{14!}{5! 3! 6!} = 168'168$$

Remarque : Il faut parfois décomposer chronologiquement les différentes étapes de rangement, les dénombrer afin de multiplier ensuite les réponses individuelles obtenues.

exple 2.

$$\text{ex } 3.2.1 \rightarrow 3 \\ + 3 \cdot 3$$

3. Les arrangements

Exemples d'introduction

- Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on écrire avec les chiffres 5, 6, 7 et 8?

$$\overline{\quad} \overline{\quad} \\ 4 \cdot 3 = 12 \text{ nbres}$$

- Combien de nombres de quatre chiffres peut-on écrire avec les chiffres 1 et 2?

$$\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 2^4 = 16 \text{ nbres}$$

Définition :

On dispose de n objets. On appelle **arrangement** une disposition ordonnée de p objets. On distingue des arrangements

- **sans répétition** : les p objets sont distincts avec $1 \leq p \leq n$. On note A_p^n le nombre de ces arrangements.
- **avec répétitions** : les p objets ne sont pas forcément distincts. Ici $1 \leq p$. On note $\overline{A}_p^n$ le nombre de ces arrangements avec répétitions.

Remarques :

- L'ordre d'écriture est très important (dans le 1^e exemple, les nombres 56 et 65 sont différents).
- Dans le modèle "placement", il y a plus d'éléments à placer que de places à disposition.

On a les formules suivantes :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

En effet : on dispose p objets distincts choisis parmi n objets avec ordre.
(p places)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{1}^{\text{e}} & \text{2}^{\text{e}} & \text{3}^{\text{e}} & & \text{p}^{\text{e}} & & \\ \hline \text{place} & & & & & & \\ n & \cdot (n-1) & \cdot (n-2) & \cdot \dots & \cdot (n-p+1) & \cdot \left(\frac{1}{n-p} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \right) & \end{array}$$

sur n places, on enlève $n-p$ places car il n'y a que p objets ($p \leq n$)

cela donne $n!$ auquel on a "enlevé" $(n-p)!$ facteurs

après simplification on obtient : $\frac{n!}{(n-p)!}$

exple $A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1}$
on a "enlevé" 4 places.

et

$$\overline{A_p^n} = n^p$$

En effet : on dispose p objets choisis parmi n objets, on peut
 (p places)
 disposer plusieurs fois le même objet :

$$\overline{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = n^p$$

Remarques :

1. Les permutations correspondent au cas particulier des arrangements de tous les objets :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

2. Les calculatrices ont une touche qui permet de calculer directement A_p^n . 2nd nPr 9

Exemples

1. Combien de mots de cinq lettres distinctes peut-on former avec le mot EQUATIONS?

$$\overline{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = A_9^9 = \frac{9!}{4!} = 15'120 \text{ mots}$$

2. Une fiduciaire nomme chaque dossier avec un code de 3 lettres distinctes suivies de 2 chiffres distincts. Combien y a-t-il de codes possibles?

$$\overline{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9} = A_{26}^3 \cdot A_{10}^2 = 1404000 \text{ codes}$$

ex § 3.4.

prob. mélangées : 3.6.1 $\rightarrow$ 3.6.14

SAUF 3.6.4 (9 / 13)
 ↑
 plus tard év. plus tard

4. Les combinaisons

Exemple d'introduction :

Quatre personnes A, B, C et D désirent jouer au tennis de table en double. Combien d'équipes différentes peuvent-elles former ?

$\{A;B\}$ $\{A;C\}$ $\{A;D\}$ $\{B;C\}$ $\{B;D\}$ $\{C;D\}$ 6 équipes

Définition :

On appelle **combinaison simple** une disposition non ordonnée de p éléments distincts choisis parmi n objets ($1 \leq p \leq n$).

On note C_p^n le nombre de ces combinaisons.

Remarques :

1. Une combinaison est caractérisée uniquement par le choix des objets, et pas par l'ordre des objets. L'équipe $\{A;B\}$ ne diffère pas de l'équipe $\{B;A\}$.
2. On ne peut pas utiliser le modèle "placement", car celui-ci induit un choix ordonné ; ce qui n'est pas le cas lors de combinaisons.

On a la formule suivante :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

En effet :

On détermine le nbre d'arrangements sans répétition de p objets choisis parmi n et on le divise par le nbre de permutations de ces p objets (pour "enlever" l'ordre) :

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{P_p} = \frac{\frac{n!}{n-p!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad (= \overline{P}_n(p; n-p))$$

Remarques :

1. Les calculatrices ont une touche qui permet de calculer directement C_p^n . 2nd 8
2. La notion de combinaison avec répétitions existe, mais nous ne l'étudierons pas dans le cadre de ce cours.

Exemples :

1. De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

$$C_3^{24} = 2'024$$

tirages

2. Combien de mains différentes de six cartes peut-on obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?

$$C_6^{36} = 1'947'792$$

Parmi celles-ci, combien contiennent les 4 valets ?

$$C_4^4 \cdot C_2^{32} = 1 \cdot 496 = 496$$

Combien contiennent au moins 1 valet ?

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1 valet} & \text{ou} & \text{2 valets} & \text{ou} & \text{3 valets} & \text{ou} & \text{4 valets} \\
 C_1^4 \cdot C_5^{32} & + & C_2^4 \cdot C_4^{32} & + & C_3^4 \cdot C_3^{32} & + & C_4^4 \cdot C_2^{32} \\
 4 \cdot 201'376 & + & 6 \cdot 35'960 & + & 4 \cdot 4960 & + & 1 \cdot 496 \\
 \\
 & = & 1'041'600
 \end{array}$$

Dans le cas de « au moins un », on peut dénombrer la situation « aucun » que l'on déduit du dénombrement « total ».

“
tout - aucun”

$$C_6^{36} - C_6^{32} = 1'041'600$$

3. Combien y a-t-il de possibilités à l'Euromillions ? Pour rappel, il faut trouver 5 bons numéros parmi 50 à choix et 2 étoiles parmi 12.

$$C_5^{50} \cdot C_2^{12} = 2'118'760 \cdot 66 = 139'838'160$$

ex 3.5.1 → 3.5.3

3.6.4 puis 15 → 24

3.6.25/27/30/31/36/39 → 1 erreur : rép. f) 1384

3.6.13 / 32 / 37