

Juin 2011

$$\gamma: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 15 \quad a: 2x + y = 7 \quad T(-4; 5) \quad B(-3; 8)$$

a) $T \in \gamma: (-4)^2 + 5^2 + 4(-4) - 2 \cdot 5 = 16 + 25 - 16 - 10 = 15 \quad \checkmark$

b) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 4 + 1$
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow \underline{C(-2; 1)}$ et $\underline{r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y = 15 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x + 7$ substitution

$$\Rightarrow x^2 + (-2x+7)^2 + 4x - 2(-2x+7) = 15$$

$$x^2 + 4x^2 - 28x + 49 + 4x + 4x - 14 = 15$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$\downarrow \\ x = 2$$

$$\Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 7 = 3 \quad \Rightarrow \underline{I(2; 3)}$$

\Rightarrow le cercle est tangent à la droite car il n'y a qu'un point d'intersection

d) * $t \perp (CT)$ car tangente passant par T

$$\Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t: -x + 2y + c = 0$$

* $T \in t \Rightarrow -(-4) + 2 \cdot 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -14$

$$\Rightarrow \underline{t: -x + 2y - 14 = 0} \quad \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 7$$

e) a: $2x + y - 7 = 0$

t: $-x + 2y - 14 = 0$

↗ coeff. "échangés" avec un signe "changé" $\Rightarrow a \perp t \Rightarrow$ angle de 90°

ou $\vec{d}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_a \cdot \vec{d}_t = -1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow " \Rightarrow "$

ou $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_a \cdot \vec{n}_t = \dots = 0 \Rightarrow " \Rightarrow "$

ou $m_a = -\frac{2}{1} = -2$ et $m_t = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $m_a \cdot m_t = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow " \Rightarrow "$

f) $\frac{2x+y-7}{\sqrt{2^2+1^2}} = \pm \frac{-x+2y-14}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} \quad | \cdot \sqrt{5}$

$2x+y-7 = \pm (-x+2y-14)$

$\oplus 2x+y-7 = -x+2y-14$ $\ominus 2x+y-7 = x-2y+14$

$3x-y+7 = 0$

$b: x+3y-21 = 0$

$m = -\frac{3}{-1} = 3 > 0 \quad \times$

$m = -\frac{1}{3} < 0 \quad \checkmark$

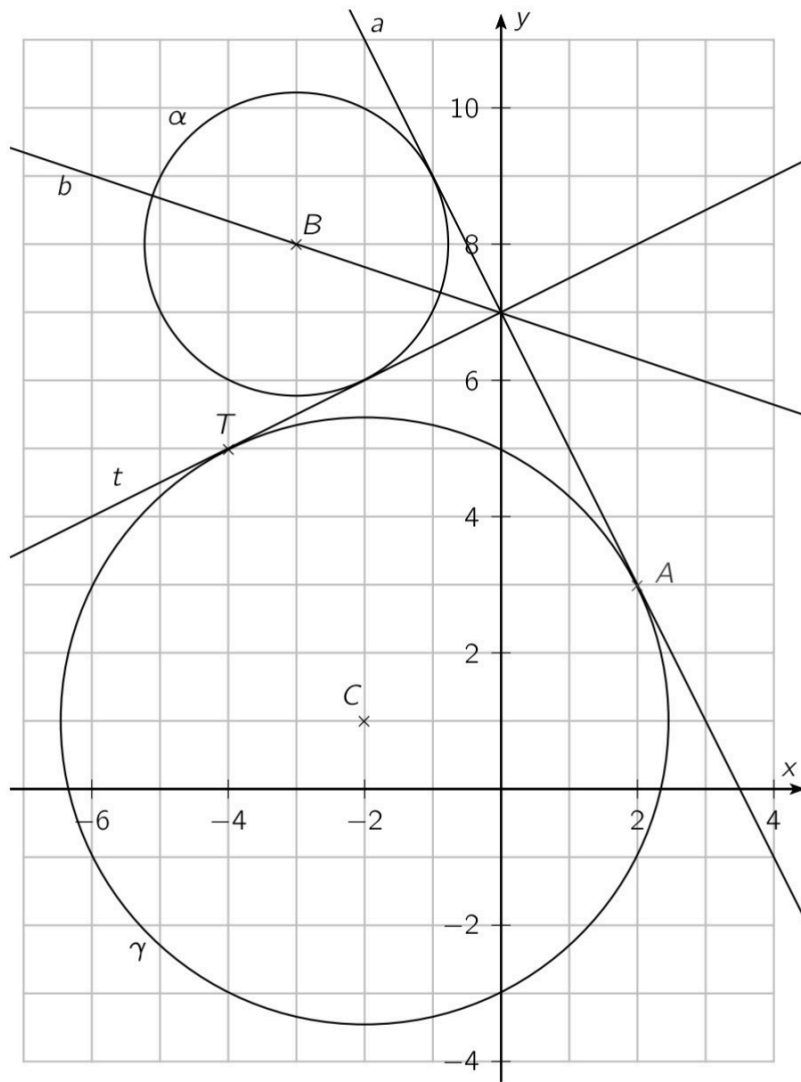
$B(-3; 8) \in b : -3 + 3 \cdot 8 - 21 = -3 + 24 - 21 = 0 \checkmark$

g) α de centre $B(-3; 8) \Rightarrow \alpha: (x+3)^2 + (y-8)^2 = r^2$

α tngt à $a \Rightarrow \delta(B; a) = r$

$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-3) + 8 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = r$

$\Rightarrow \alpha: (x+3)^2 + (y-8)^2 = 5$



Jun 2013

$$\gamma: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0 \quad P(14; 8) \quad T(2; -8) \quad U(2; 4)$$

a) $\vec{OT} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
 $\vec{UP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ } \Rightarrow ne sont pas colinéaires

et $\vec{OU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\vec{TP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ } \Rightarrow ne sont pas colinéaires

\Rightarrow OTPU n'est pas un trapèze

b) $Aire_{OTPU} = Aire_{OTP} + Aire_{OPU} = \frac{1}{2} |\det(\vec{OT}, \vec{OP})| + \frac{1}{2} |\det(\vec{OP}, \vec{OU})|$
 $= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2 \cdot 8 - (-8) \cdot 14| + \frac{1}{2} |14 \cdot 4 - 8 \cdot 2| = \underline{84 \text{ u}^2}$

c) $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 16 + 4$
 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 40 \Rightarrow \underline{C(4; -2)}$ et $\underline{r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}}$

d) $T \in \gamma: 2^2 + (-8)^2 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot (-8) - 20 = 4 + 64 - 16 - 32 - 20 = 0 \checkmark$
 $P \notin \gamma: 14^2 + 8^2 - 8 \cdot 14 + 4 \cdot 8 - 20 = 196 + 64 - 112 + 32 - 20 = 160 \neq 0$

e) $t_{\text{tge}}: y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0$
* $P \in t_{\text{tge}} \Rightarrow 14m - 8 + h = 0 \Leftrightarrow h = -14m + 8 \Rightarrow t_{\text{tge}}: \underline{mx - y - 14m + 8 = 0}$
* $\delta(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|4m + 2 - 14m + 8|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{10} \quad | \cdot \sqrt{m^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow |-10m + 10| = 2\sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow -10m + 10 = \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1} \quad | (\)^2$
 $\Leftrightarrow 100m^2 - 200m + 100 = 4 \cdot 10(m^2 + 1)$
 $\Leftrightarrow 100m^2 - 200m + 100 = 40m^2 + 40$
 $\Leftrightarrow 60m^2 - 200m + 60 = 0$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0 \quad \Delta = 64$$

$$\Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow on remplace m dans l'équation $mx - y - 14m + 8 = 0$ (trouvée plus haut)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 42 + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{3x - y - 34 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = 3x - 34} \quad (v) \\ \frac{1}{3}x - y - \frac{14}{3} + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{x - 3y - 14 + 24 = 0} \Leftrightarrow \underline{x - 3y + 10 = 0} \quad (u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$$

variante avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$$8 + 2 = m(14 - 4) \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$10 = 10m \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1} \quad \triangle \text{ d'abord isoler } \sqrt{\quad}$$

$$10 - 10m = \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1} \quad | (\quad)^2$$

... (idem plus haut)

$$m = 3 \Rightarrow y = 3x + h \text{ et } P \in \text{tg} \Rightarrow 8 = 3 \cdot 14 + h \Leftrightarrow h = -34 \Rightarrow y = 3x - 34 \quad (v)$$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + h \text{ et } P \in \text{tg} \Rightarrow 8 = \frac{1}{3} \cdot 14 + h \Leftrightarrow h = \frac{10}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \quad (u)$$

f) $P \in u$ par construction et $U \in u$ car $2 - 3 \cdot 4 + 10 = 2 - 12 + 10 = 0 \checkmark$

g) le cercle passe par C et $P \Rightarrow$ le centre se trouve sur la médiatrice m_{CP}
et " est tangent à UP en $P \Rightarrow$ le centre se trouve sur une perpendiculaire à UP (u) en P .

$$* \vec{CP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{CP}: x + y + c = 0$$

$$M_{CP} \left(\frac{4+14}{2}; \frac{8-2}{2} \right) = (9; 3) \in m_{CP} \Rightarrow 9 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$$

$$\Rightarrow m_{CP}: x + y - 12 = 0$$

$$\begin{aligned}
 * p \perp u &\Rightarrow 3x+y+k=0 \\
 P \in p &\Rightarrow 3 \cdot 14+8+k=0 \Leftrightarrow k=-50 \quad \left. \vphantom{P \in p} \right\} \Rightarrow p: 3x+y-50=0
 \end{aligned}$$

* B centre du cercle :

$$m_{CP} \cap p : \begin{cases} x+y-12=0 & | 1 \\ 3x+y-50=0 & | -1 \end{cases}$$

$$-2x+38=0$$

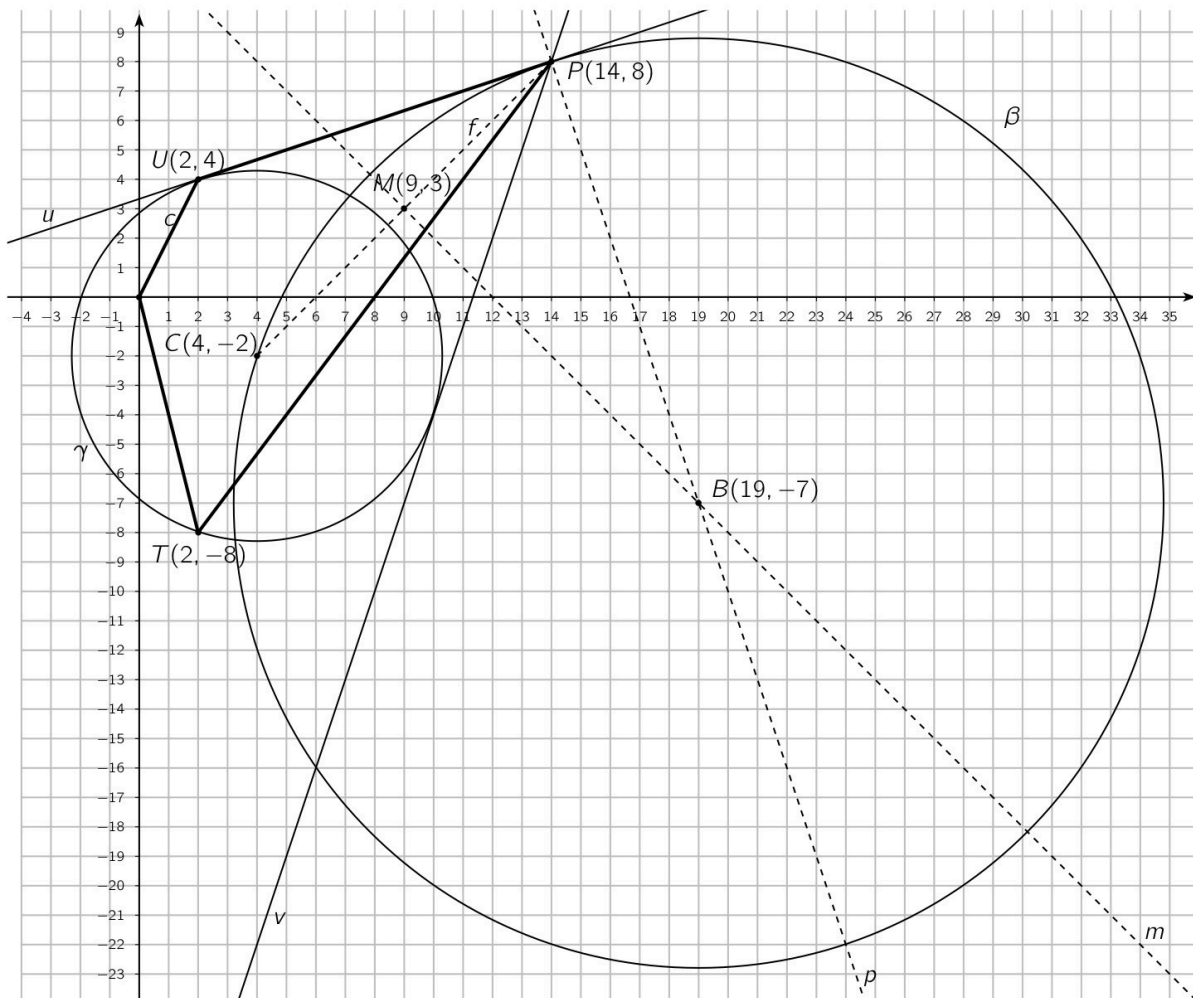
$$x=19 \Rightarrow 19+y-12=0 \Leftrightarrow y=-7 \Rightarrow B(19, -7)$$

* rayon : $(x-19)^2+(y+7)^2=r^2$

$$C \in \beta \Rightarrow (4-19)^2+(-2+7)^2=225+25=250=r^2$$

variante : $r = \delta(B;C) = \|\vec{BC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{225+25} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

$\Rightarrow \beta : (x-19)^2+(y+7)^2=250$



Juin 2014

A(-3;0) B(1;-3) E(-4;7)

$$\gamma_1: x^2 - 22x + y^2 - 4y = 0$$

$$a) x^2 - 22x + 121 + y^2 - 4y + 4 = 0 + 121 + 4$$

$$(x-11)^2 + (y-2)^2 = 125 \Rightarrow \underline{C(11;2)} \text{ et } \underline{r = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}}$$

$$b) \gamma_2: (x+3)^2 + y^2 = r^2$$

$$B \in \gamma_2 \Rightarrow (1+3)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25 = r^2 \Rightarrow \underline{\gamma_2: (x+3)^2 + y^2 = 25}$$

$$\text{variante: } r = \delta(A;B) = \|\vec{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$c) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB): 3x + 4y + c = 0$$

$$A \in (AB) \Rightarrow 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9 \Rightarrow \underline{(AB): 3x + 4y + 9 = 0}$$

$$d) B \in \gamma_1: 1^2 - 22 \cdot 1 + (-3)^2 - 4 \cdot (-3) = 1 - 22 + 9 + 12 = 0 \checkmark$$

$$\gamma_1 \cap \gamma_2: \begin{cases} x^2 - 22x + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 22x + y^2 - 4y = 0 & | 1 \\ -x^2 - 6x - y^2 = 16 & | -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -28x - 4y = -16 \\ 7x + y = 4 \end{array} \quad | : (-4)$$
$$y = -7x + 4$$

substitution
 \Rightarrow
dans 2^e equ.

$$x^2 + 6x + (-7x + 4)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 49x^2 - 56x + 16 = 16$$

$$50x^2 - 50x = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \Rightarrow y = -7 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow \underline{F(0;4)} \\ 1 \Rightarrow y = -7 \cdot 1 + 4 = -3 \Rightarrow \underline{B(1;-3)} \end{cases}$$

$$e) E \notin \gamma_1: (-4)^2 - 22 \cdot (-4) + 7^2 - 4 \cdot 7 = 16 + 88 + 49 - 28 = 125 \neq 0$$

$$\begin{aligned} * t_{1,2}: y = mx + h &\Leftrightarrow mx - y + h = 0 \\ \text{et } E \in t_{1,2} &\Rightarrow -4m - 7 + h = 0 \Leftrightarrow h = 4m + 7 \end{aligned} \Rightarrow \underline{t_{1,2}: mx - y + 4m + 7 = 0}$$

$$* \delta(C_1, t_{1,2}) = r \Leftrightarrow \frac{|11m - 2 + 4m + 7|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5\sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |15m + 5| = 5\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 15m + 5 = \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | :5$$

$$\Leftrightarrow 3m + 1 = \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | ()^2$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 5(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \Delta = 25$$

$$\Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

\Rightarrow on remplace m dans l'équation $mx - y + 4m + 7 = 0$ (trouvée plus haut)

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1: \frac{1}{2}x - y + 4 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - y + 9 = 0 \Leftrightarrow \underline{x - 2y + 18 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{2}x + 9} \\ t_2: -2x - y + 4 \cdot (-2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \underline{-2x - y - 1 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = -2x - 1} \end{cases}$$

variante avec formule: $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$$7 - 2 = m(-4 - 11) \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$5 = -15m \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | :5$$

$$1 = -3m \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad \triangle \text{ d'abord isoler } \sqrt{\quad}$$

$$1 + 3m = \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | ()^2$$

... (idem plus haut)

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + h \text{ et } E \in t_1 \Rightarrow 7 = \frac{1}{2}(-4) + h \Leftrightarrow h = 9 \Rightarrow \dots$$

$$m = -2 \Rightarrow y = -2x + h \text{ et } E \in t_2 \Rightarrow 7 = -2 \cdot (-4) + h \Leftrightarrow h = -1 \Rightarrow \dots$$

f)

ABD rectangle en A

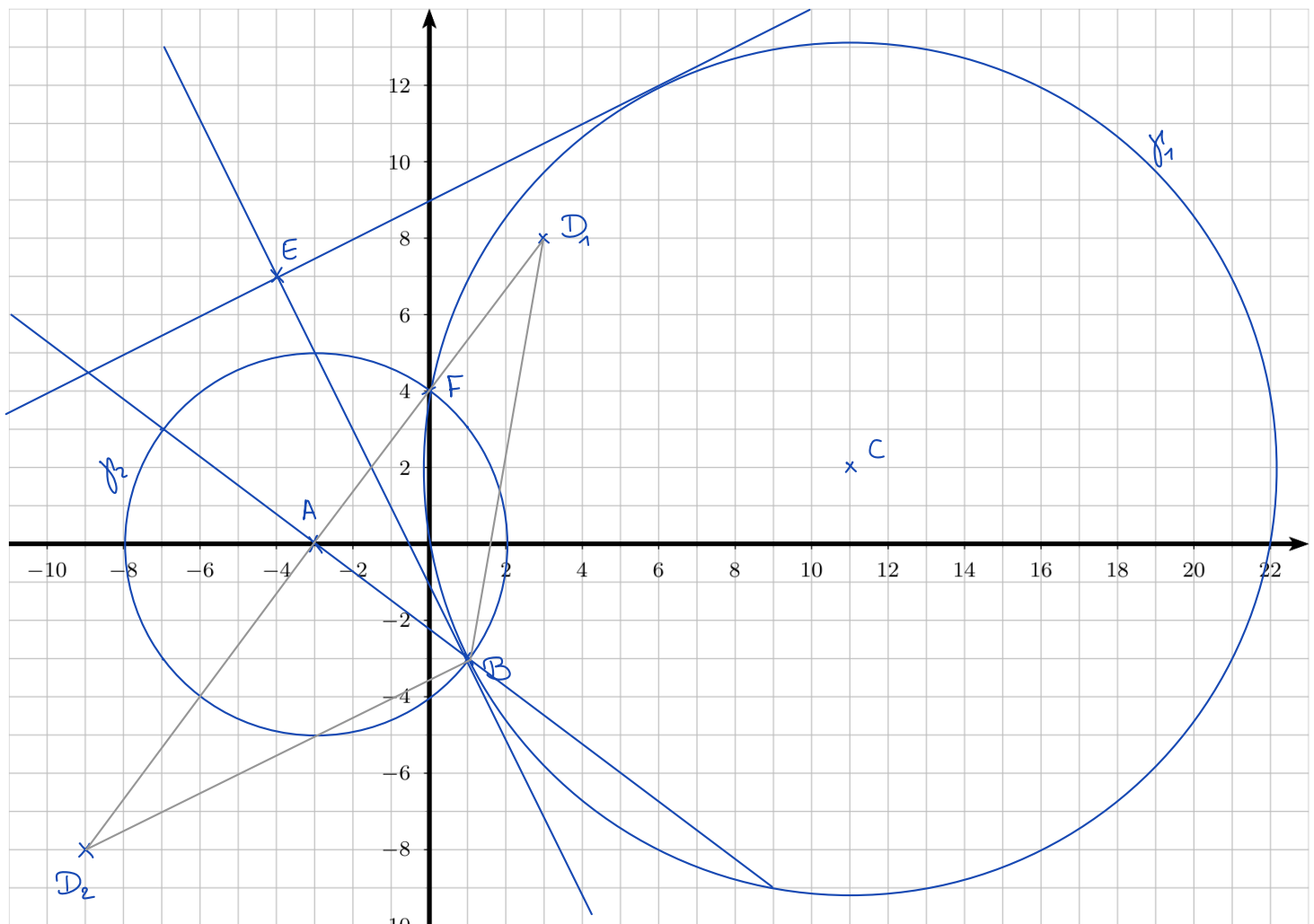
Comme $\|\vec{AB}\| = 5$ et Aire = 25 = $\frac{5 \cdot x}{2} \Leftrightarrow x = 10$ avec $\|\vec{AD}\| = x$ \vec{AD} est orthogonal à \vec{AB} et 2 fois plus grand

$$\Rightarrow \vec{AD} = \pm 2 \vec{n}_{AB} \stackrel{c)}{=} \pm 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{D_1(3;8)}$$

$$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \text{ou} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{D_2(-9;-8)}$$

1 seule solution demandée!



Juin 2015

$$\gamma: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 18$$

$$t: x-y-9=0$$

$$d: 7x+y+9=0$$

a) $C(7;4)$ et $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\delta(C;t) = \frac{|7-4-9|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = r \quad \checkmark$

$$\gamma \cap t: \begin{cases} (x-7)^2 + (y-4)^2 = 18 \\ x-y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x-9 \quad \curvearrowright$$

substitution
 \Rightarrow
dans 1^{re} équ.

$$(x-7)^2 + (x-9-4)^2 = 18$$

$$(x-7)^2 + (x-13)^2 = 18$$

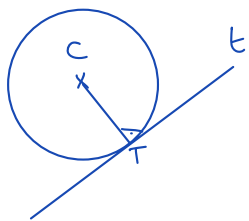
$$x^2 - 14x + 49 + x^2 - 26x + 169 = 18$$

$$2x^2 - 40x + 200 = 0$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$(x-10)^2 = 0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=10-9=1 \Rightarrow \underline{T(10;1)}$$

Variante Comme on a prouvé que t est tangente à γ , on sait que $(CT) \perp t$:



$$(CT) \perp t \Rightarrow x+y+c=0$$

$$C \in (CT) \Rightarrow 7+4+c=0 \Leftrightarrow c=-11$$

$$\left. \begin{array}{l} (CT) \perp t \Rightarrow x+y+c=0 \\ C \in (CT) \Rightarrow 7+4+c=0 \Leftrightarrow c=-11 \end{array} \right\} \Rightarrow (CT): x+y-11=0$$

$$+ \begin{cases} x-y-9=0 & | 1 \\ x+y-11=0 & | 1 \end{cases}$$

$$\hline 2x - 20 = 0$$

$$x=10 \Rightarrow 10-y-9=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow T(10;1)$$

$$c) \quad s // t \Rightarrow s: x-y+c=0$$

$$\text{et } \mathcal{D}(C; s) = r \Leftrightarrow \frac{|7-4+c|}{\frac{\sqrt{1+(-1)^2}}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |3+c| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 3+c = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow c = \begin{cases} 6-3 = 3 & \Rightarrow \underline{s: x-y+3=0} \\ -6-3 = -9 & \Rightarrow \text{on obtient } t \end{cases}$$

Comme C est le milieu de ST, si S(s₁, s₂) on a

$$C(7; 4) = \left(\frac{s_1+10}{2}; \frac{s_2+1}{2} \right) \Rightarrow \underline{S(4; 7)}$$

$$d) \quad \text{bissectrices de } t: x-y-9=0 \quad \text{et} \quad d: 7x+y+9=0$$

$$b_{1,2}: \frac{x-y-9}{\sqrt{1^2+1^2}} = \pm \frac{7x+y+9}{\sqrt{7^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-9}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7x+y+9}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 5(x-y-9) = \pm (7x+y+9)$$

$$\Leftrightarrow 5x-5y-45 = \begin{cases} 7x+y+9 & \Leftrightarrow 2x+6y+54=0 & \Leftrightarrow \underline{b_1: x+3y+27=0} \\ -7x-y-9 & \Leftrightarrow 12x-4y-36=0 & \Leftrightarrow \underline{b_2: 3x-y-12=0} \end{cases}$$

e) β est tangent à t et d ,
 donc son centre est sur une des
 bissectrices, celle de pente positive
 comme on le voit sur la représentation
 graphique.

Il s'agit de b_2 dont la pente
 vaut $m_2 = -\frac{3}{-1} = 3$.

le centre de β est également sur
 la droite a perpendiculaire à t passant par T

Déterminons a :

$$\left. \begin{array}{l} a \perp t \Rightarrow a: x+y+C=0 \\ T \in a \Rightarrow 10+1+C=0 \\ \quad \quad \quad C = -11 \end{array} \right\} \Rightarrow a: x+y-11=0$$

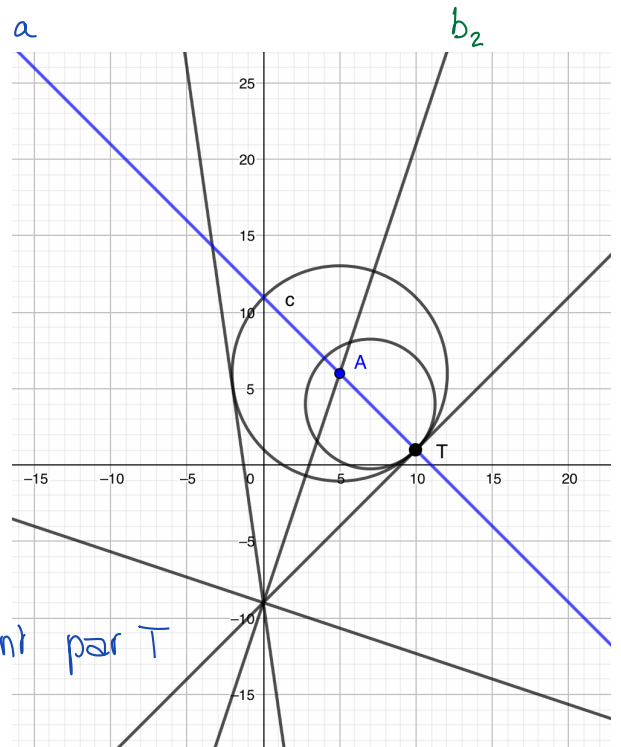
$$\Rightarrow \{A\} = b_2 \cap a: \begin{cases} 3x-y = 9 & | & 1 \\ x+y = 11 & | & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 5+y = 11 \Rightarrow y = 6 \\ \Rightarrow \underline{A(5;6)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \beta: (x-5)^2 + (y-6)^2 = r^2$$

$$\text{Comme } T(10;1) \in \beta: (10-5)^2 + (1-6)^2 = 25 + 25 = r^2$$

$$\text{variante: } r = \delta(A;T) = \|\vec{AT}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\beta: (x-5)^2 + (y-6)^2 = 50}$$



Juin 2017

$$A(2;8) \quad B(6;0) \quad C(16;10) \quad D(10;-8) \quad \gamma: x^2 + y^2 - 20x - 14y + 104 = 0$$

$$a) \quad x^2 - 20x + 100 + y^2 - 14y + 49 = -104 + 100 + 49$$

$$(x-10)^2 + (y-7)^2 = 45 \quad \Rightarrow \quad \underline{M(10;7)} \quad \text{et} \quad \underline{r = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}}$$

$$b) \quad \text{Aire}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}) \right| \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aire}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 4 \cdot 2 - (-8) \cdot 14 \right| = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60 \text{ u}^2$$

$$c) \quad \text{On va montrer que } S(M; (AB)) = r = 3\sqrt{5}$$

$$* \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB): 2x + y + c = 0$$

$$A \in (AB) \Rightarrow 2 \cdot 2 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12 \Rightarrow \underline{(AB): 2x + y - 12 = 0}$$

$$* \quad S(M; (AB)) = \frac{|2 \cdot 10 + 7 - 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} = r \quad \checkmark$$

$$d) \quad C \in \gamma: 16^2 + 10^2 - 20 \cdot 16 - 14 \cdot 10 + 104 = 256 + 100 - 320 - 140 + 104 = 0 \quad \checkmark$$

$$t_1 \perp (MC): \vec{MC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{t_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t_1: 2x + y + c = 0$$

$$C \in t_1 \Rightarrow 2 \cdot 16 + 10 + c = 0 \Leftrightarrow c = -42 \Rightarrow \underline{t_1: 2x + y - 42 = 0}$$

variante avec la formule du dédoublement:

$$(x-10)^2 + (y-7)^2 = 45 \Leftrightarrow (x-10)(x-10) + (y-7)(y-7) = 45$$

$$\Rightarrow (16-10)(x-10) + (10-7)(y-7) = 45$$

$$6(x-10) + 3(y-7) = 45$$

$$6x + 3y - 126 = 0$$

$$2x + y - 42 = 0$$

e) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$
 $\vec{AB} = \vec{BD} \Rightarrow$ les vecteurs sont colinéaires \Rightarrow les pts sont alignés.

f) $\delta(H; D) = \|\vec{HD}\| = \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + (-15)^2} = 15 > 3\sqrt{5} \approx 6,71$
donc D est extérieur au cercle.

* $t_{2,3} : y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0$

$D \in t_{2,3} \Rightarrow 10m + 8 + h = 0 \Leftrightarrow h = -10m - 8 \Rightarrow \underline{t_{2,3} : mx - y - 10m - 8 = 0}$

* $\delta(H; t_{2,3}) = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|10m - 7 - 10m - 8|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow |-15| = 3\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow 15 = 3\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | : 3$

$\Leftrightarrow 5 = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \quad | ()^2$

$\Leftrightarrow 25 = 5(m^2 + 1)$

$\Leftrightarrow 25 = 5m^2 + 5$

$\Leftrightarrow 0 = 5m^2 - 20$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (m+2)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

On remplace m dans l'équation $t_{2,3} : mx - y - 10m - 8 = 0$

$t_2 : -2x - y - 10(-2) - 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{-2x - y + 12 = 0}$ (c'est la droite (AB))

$t_3 : 2x - y - 10 \cdot 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{2x - y - 28 = 0}$

Variante avec formule: $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$-8 - 7 = m(10 - 10) \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow -15 = \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \dots$ idem plus haut \dots

g) * Le centre K est sur l'axe $Ox \Rightarrow K(k_1; 0)$

* Le cercle est tangent à (AB) en $A \Rightarrow (KA) \perp (AB)$

$$\Rightarrow (KA) : x - 2y + k = 0$$

$$\text{et } A \in (KA) \Rightarrow 2 - 2 \cdot 8 + k = 0 \Leftrightarrow k = 14 \quad \left. \vphantom{\text{et } A \in (KA)} \right\} \Rightarrow (KA) : x - 2y + 14 = 0$$

$$\Rightarrow K(k_1; 0) \in (KA) \Rightarrow k_1 - 2 \cdot 0 + 14 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -14 \Rightarrow \underline{K(-14; 0)}$$

$$* (x+14)^2 + y^2 = r^2$$

$$A \in \Gamma \Rightarrow (2+14)^2 + 8^2 = 256 + 64 = 320 = r^2$$

$$\text{variante } r = \delta(A, K) = \|\overrightarrow{AK}\| = \left\| \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{256 + 64} = \sqrt{320}$$

$$\Rightarrow \underline{\Gamma : (x+14)^2 + y^2 = 320}$$

