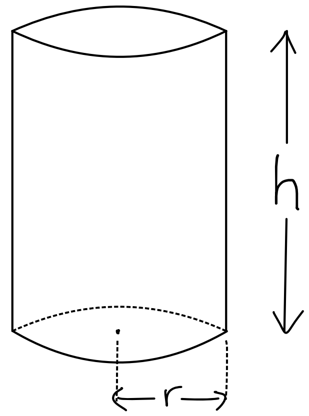
Prob1

croquis :



variables : r et h, $r, h > 0$

fonction à optimiser : quantité de fer blanc min.
surface ou aire totale

$$A(r;h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \quad (1)$$

Contrainte : volume $= 785 \text{ cm}^3$

$$\pi r^2 \cdot h = 785$$

$$h = \frac{785}{\pi r^2} \quad (2)$$

(1) et (2)

$$\Rightarrow \quad A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{785}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1570}{r} \quad \text{et} \quad r > 0$$

optimisation : $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{1570}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 1570}{r^2}$

zéro de A' : $4\pi r^3 - 1570 = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 1570$

$$r^3 = \frac{1570}{4\pi} = \frac{785}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{785}{2\pi}} \cong 5$$

r	0		5	
A'	‖	$-$	0	$+$
A	‖	↘	min	↗

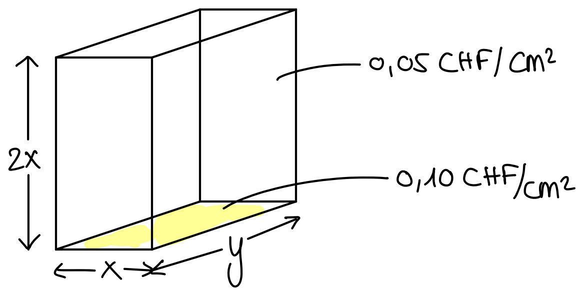
$A(5) \cong 471{,}08 \Rightarrow \min(5\,;\,471{,}08)$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{785}{\pi \cdot 5^2} \cong 10$$

Les dimensions pour une utilisation minimale d'acier d'environ 471 cm^2, sont de 5 cm pour le rayon et de 10 cm pour la hauteur, soit le diamètre égal à la hauteur.

Prob 2

croquis :



Variables : x et y

$x, y > 0$

fct à optimiser : coût de fabrication : $f(x;y) = 0{,}1xy + 0{,}05(2\cdot 2x^2 + 2\cdot 2xy)$

$= 0{,}1xy + 0{,}2x^2 + 0{,}2xy$

$= 0{,}2x^2 + 0{,}3xy$ (1)

effectuer et simplifier

contrainte : volume = 5600 $\Leftrightarrow$ $2x^2y = 5600$

$y = \dfrac{5600}{2x^2} = \dfrac{2800}{x^2}$ (2)

simplifier.

(1) et (2)

$\Rightarrow$ $f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}3\cancel{x}\cdot\dfrac{2800}{x^{\cancel{2}}} = 0{,}2x^2 + \dfrac{840}{x}$

(tjrs simplifier au max avant de dériver)

$EV(f) = \mathbb{R}_+^*$

On dérive f pour trouver le minimum :

$\Rightarrow$ $f'(x) = 0{,}2\cdot 2x + 840\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = 0{,}4x + 840\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0{,}4x - \dfrac{840}{x^2}$

$= \dfrac{0{,}4x^3 - 840}{x^2}$

zéro de f' : $0{,}4x^3 - 840 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{840}{0{,}4} = 2100 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2100} \cong 12{,}81$

On vérifie avec un tableau de croissance si le zéro de f' est bien un min. :

x	0		~12,81	
f'	‖	−	0	+
f	‖	↘	min	↗

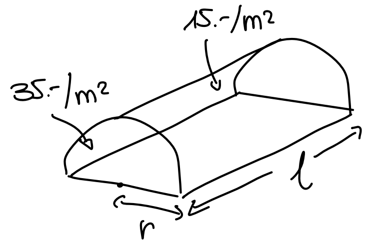
$f(12{,}81) \cong 98{,}39 \Rightarrow \min(12{,}81 ; 98{,}39)$

$2x \cong 2\cdot 12{,}81 = 25{,}61$ et $y = \dfrac{2800}{x^2} \cong \dfrac{2800}{12{,}81^2} = 17{,}07$

La caisse doit mesurer env. 12,81 cm x 17,07 cm de fond et env. 25,61 cm de haut pour un coût minimal de 98,40 CHF.

Prob 3

Croquis :



variables : r et ℓ , $r, \ell > 0$

fonction à optimiser : coût : $C(r;\ell) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 \cdot 35 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot \ell \cdot 15$

$= 35\pi r^2 + 15\pi r \ell$ (1)

contrainte : volume = 3750

$\frac{1}{2} \cdot \pi r^2 \ell = 3750 \iff \ell = \frac{2 \cdot 3750}{\pi r^2} = \frac{7500}{\pi r^2}$ (2)

(1) et (2)

a) $\Longrightarrow$ $C(r) = 35\pi r^2 + 15\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{7500}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} = 35\pi r^2 + \frac{112500}{r}$ ⊛

$= \frac{35\pi r^3 + 112'500}{r}$ #

b) optim. : avec ⊛ : $C'(r) = 70\pi r - \frac{112'500}{r^2} = \frac{70\pi r^3 - 112'500}{r^2}$

Variante avec fct donnée :

$C'(r) = \frac{105\pi r^3 - (35\pi r^3 + 112'500)}{r^2}$

$u = 35\pi r^3 + 112'500 \qquad v = r$

$u' = 3 \cdot 35\pi r^2 \qquad v' = 1$

$= 105\pi r^2$

$= \frac{70\pi r^3 - 112'500}{r^2}$

zéro de C' : $70\pi r^3 - 112'500 = 0 \iff r^3 = \frac{112'500}{70\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{112'500}{70\pi}} \simeq 8$

x	0		8	
C'	‖	−	0	+
C	‖	↘	min	↗

$\min(8; C(8)) = (8; 21'100)$

$\Rightarrow$ $r = 8$ et $\ell = \frac{7500}{\pi \cdot 64} \simeq 37,3$

La serre a un rayon de 8m et une longueur de 37,3m pour un coût minimal de 21'100 CHF

Prob 4

croquis : voir donnée   variables : x et y , $x, y > 0$

fct à optimiser : aire : $\mathcal{A}(x;y) = 2\cdot 3x^2 + 2\cdot 3xy + 2\cdot xy = 6x^2 + 8xy$ (1)

contrainte : volume = 2304 cm³ $\Leftrightarrow$ $3x^2y = 2304$

$$y = \frac{2304}{3x^2} = \frac{768}{x^2} \qquad (2)$$

a) (1) et (2) $\Rightarrow$ $\mathcal{A}(x) = 6x^2 + 8\cancel{x}\cdot\frac{768}{x^{\cancel{2}}} = \underset{⊛}{6x^2 + \frac{6144}{x}} = \frac{6x^3+6144}{x} = \frac{6(x^3+1024)}{x}$ #

b) optim. : avec ⊛ : $\mathcal{A}'(x) = 12x - \frac{6144}{x^2} = \frac{12x^3 - 6144}{x^2}$

variante avec fct donnée :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{18x^3 - 6(x^3+1024)}{x^2} = \frac{12x^3 - 6144}{x^2}$$

$u = 6(x^3+1024)$ $v = x$
$u' = 6\cdot 3x^2 = 18x^2$ $v' = 1$

zéro de $\mathcal{A}'$: $12x^3 - 6144 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{6144}{12} = 512 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{512} = 8$

V.i. : 0 (2)

x	0		8	
$\mathcal{A}'$	‖	$-$	0	$+$
$\mathcal{A}$	‖	↘	min	↗

$\min(8; \mathcal{A}(8)) = (8; 1152)$

$\Rightarrow$ $x = 8$, $y = \frac{768}{64} = 12$ et $3x = 24$

La boîte mesure 8cm x 12 cm x 24 cm pour une aire minimale de 1'152 cm².

Prob 5

$$f(x) = \frac{60'000x}{x^2 + 6400} \qquad x \geqslant 0$$

$$f'(x) = \frac{60'000(x^2+6400) - 120'000x^2}{(x^2+6400)^2}$$

$u = 60'000x \qquad v = x^2 + 6400$

$u' = 60'000 \qquad v' = 2x$

$$= \frac{60'000(x^2+6400-2x^2)}{(x^2+6400)^2} = \frac{60'000(-x^2+6400)}{(x^2+6400)^2}$$

zéros de f' : $\quad -x^2+6400 = 0 \iff x = \pm\sqrt{6400} = \pm 80$

v.i. :

x	0		80	
f'	////	$+$	0	$-$
f	////	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$f(80) = 375 \Rightarrow \text{Max}(80;375)$

80 jours dès le 1e mai

$80 - 31 = 49$ jours dès le 1e juin

$49 - 30 = 19$ jours dès le 1e juillet.

Le 19 juillet il y aura un maximum de 375 nageurs.

Prob.6

$$f(x) = 6300 + 10x + \frac{x^2}{28} \qquad EV(f) = \mathbb{R}_+$$

a) fonction à optimiser : coût de prod. unitaire $\qquad EV(g) = \mathbb{R}^*_+$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{6300}{x} + 10 + \frac{x}{28}$$

$$\Rightarrow C'(x) = -\frac{6300}{x^2} + \frac{1}{28} = \frac{x^2 - 176400}{28x^2} = \frac{(x+420)(x-420)}{28x^2}$$

zéro(s) : $\cancel{-}$ 420 et v.i : 0 (2)

x		0		420	
$C'(x)$		‖	$-$	0	$+$
C		‖	↘	min	↗

$\min(420; C(420))$ $\quad C(420) = 40$

$= \min(420; 40)$

Il doit fabriquer 420 sacs pour un coût minimal de 40 CHF par sac.

b) profit : $p(x) = 70x - \left(6300 + 10x + \frac{x^2}{28}\right) = -\frac{x^2}{28} + 60x - 6300$

$$p'(x) = -\frac{2x}{28} + 60 = -\frac{x}{14} + 60 = \frac{-x+840}{14}$$

x		0		840	
$p'(x)$		‖	$+$	0	$-$
p		‖	↗	Max	↘

$\text{Max}(840; p(840))$

$= (840; 18'900)$

Il doit fabriquer 840 sacs pour un profit maximal de 18'900 CHF.

Prob. 7

situation : 120 pl. , profit de 48 CHF / place

120 + x pl. , profit de $(48 - 0{,}25x)$ CHF / place   avec x le nbre de places (au delà de 120)

fonction à optimiser : profit mensuel $p(x) = (120+x)(48-0{,}25x)$

$$= 5760 - 30x + 48x - 0{,}25x^2$$

$$= 5760 + 18x - 0{,}25x^2 \quad \text{et } x > 0$$

$\Rightarrow p'(x) = 18 - 0{,}5x \quad \Rightarrow$ zéro de p' : $x = \dfrac{18}{0{,}5} = 36$

x	0		36	
p'		+	0	−
p		↗	Max	↘

Max (36 ; 6084)

Il faut aménager 156 places pour un profit mensuel maximum de 6'084 CHF.