Ex 2.8.2

a) $f(x) = x^3 - 3x \qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$

$\qquad\qquad -1 \qquad 1$ zéros de f'

x		-1		1	
sgn(f')	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = -1 + 3 = 2 \quad \Rightarrow$ Max$(-1;2)$

$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = 1 - 3 = -2 \quad \Rightarrow$ min$(1;-2)$

avec étude complète :

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

2) zéro et signe : zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

$0 \qquad -\sqrt{3} \qquad +\sqrt{3}$ $\cong 1{,}7$

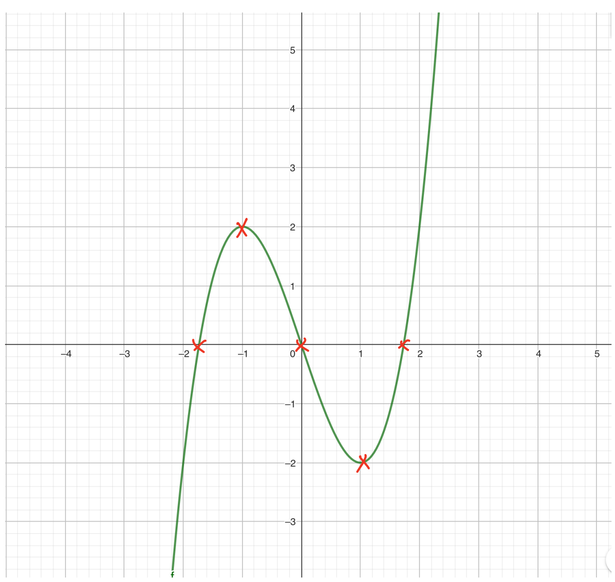
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

3) asymptotes : AV/trou : ——— vu $ED(f)$

AH/AO : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ pas d'AH, ni d'AO

4) crssce : voir plus haut

graphe :



b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$ $\qquad$ $ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2-1) = -4x(x+1)(x-1)$

$\downarrow$ 0 $\quad\downarrow$ -1 $\quad\downarrow$ 1 $\qquad$ zéros de f'

x		-1		0		1	
sgn(f')	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Max$_1$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max$_2$	$\searrow$

$f(-1) = 13 \Rightarrow$ Max$_1$ $(-1; 13)$

$f(0) = 12 \Rightarrow$ min $(0; 12)$

$f(1) = 13 \Rightarrow$ Max$_2$ $(1; 13)$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$ $\qquad$ $ED(f) = \mathbb{R}$

$u = (x+2)^3$ $\qquad$ $v = (x-3)^2$

$u' = 3(x+2)^2 \cdot 1 = 3(x+2)^2$ $\qquad$ $v' = 2(x-3) \cdot 1 = 2(x-3)$

$$f'(x) = 3(x+2)^2(x-3)^2 + (x+2)^3 \cdot 2(x-3)$$

$$= 3(x+2)^2(x-3)^2 + 2(x+2)^3(x-3)$$

$$= (x+2)^2(x-3)\left[\underbrace{3(x-3) + 2(x+2)}_{3x-9+2x+4}\right]$$

$$= (x+2)^2(x-3)(\underbrace{5x-5}_{5(x-1)}) = 5(x+2)^2(x-3)(x-1)$$

$\downarrow$ -2 (2) $\quad\downarrow$ 3 $\quad\downarrow$ 1 $\qquad$ zéros de f'

x		-2		1		3	
sgn(f')	$+$	0 (2)	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	palier	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(1000): +$

palier : $f(-2) = (-2+2)^3(-2-3)^2 = 0 \cdot (-5)^2 = 0 \Rightarrow$ palier $(-2; 0)$

Max : $f(1) = (1+2)^3(1-3)^2 = 3^3 \cdot (-2)^2 = 27 \cdot 4 = 108 \Rightarrow$ Max$(1; 108)$

min : $f(3) = (3+2)^3(3-3)^2 = 5^3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ min$(3; 0)$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x-3)\cdot 1}{(x+5)^2} = \dfrac{2x+10-2x+3}{(x+5)^2} = \dfrac{13}{(x+5)^2}$

pas de zéro

v.i. : -5 (2)

x		-5	
f'	$+$	$\|\|$	$+$
f	$\nearrow$	$\|\|$ (2)	$\nearrow$

pas d'extremum

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+2) - (x-1)^2\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)\left[2(x+2) - (x-1)\right]}{(x+2)^2} = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$

x		-5		-2		1	
f'	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\|\|$ (2)	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-5) = \dfrac{36}{-3} = -12 \implies$ Max $(-5;-12)$

$f(1) = 0 \implies$ min $(1;0)$

avec étude complète :

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) zéro et signe : $f(x) = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$ (2)

x		-2		1	
$sgn(f)$	$-$	$\|\|$	$+$	0 (2)	$+$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = "\frac{9}{0}" = \infty \Rightarrow x = -2$ est une AV

AH/AO : comme dim(N) = dim(D) + 1 $(2 = 1+1)$ on a une AO :

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x+2 \\ \hline -x^2 \mp 2x & x-4 \\ \hline -4x+1 & \\ +4x+8 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

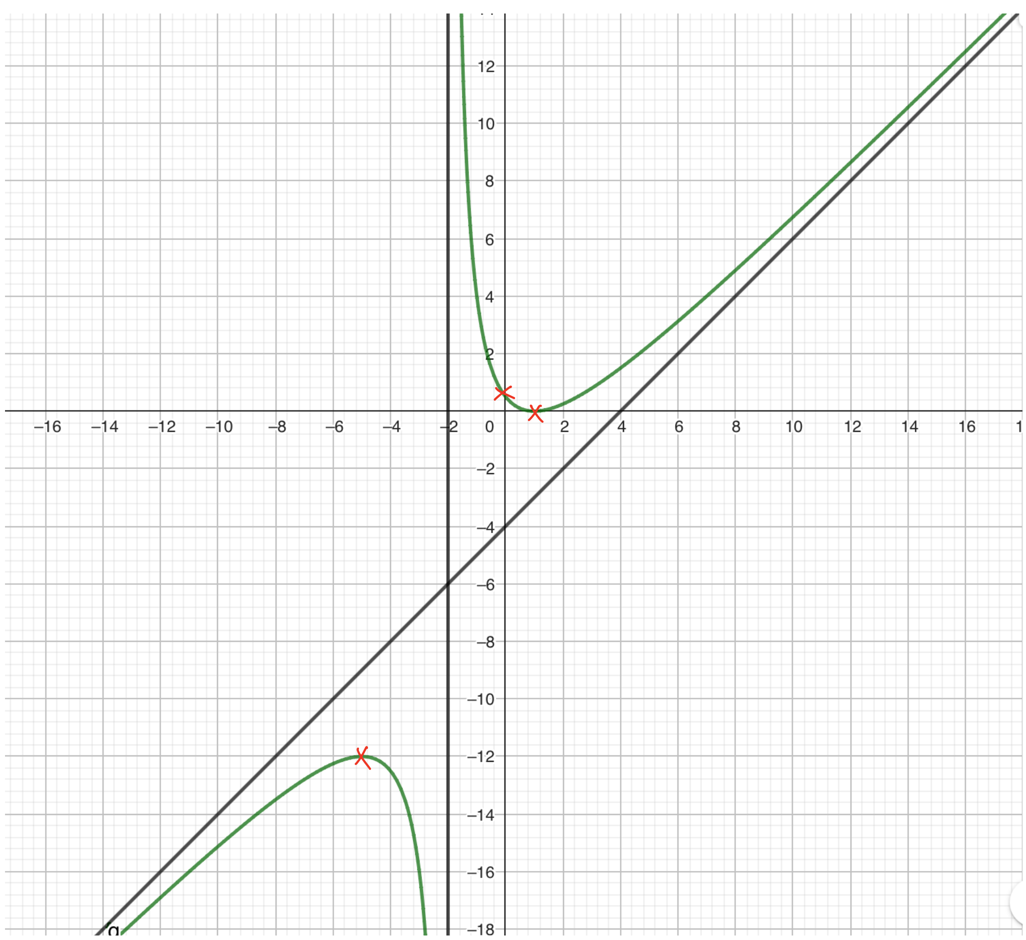
$$\Rightarrow f(x) = x - 4 + \underbrace{\frac{9}{x+2}}_{\delta(x)} \Rightarrow \text{AO} : y = x-4$$

$\delta(x)$:

x		-2	
sgn(δ)	$-$	‖	$+$
	dessous	‖	dessus

4) croissance : voir plus haut

5) graphe : OàO : $f(0) = \frac{1}{2}$



f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ zéros : ± 1

x		-1	$+$	1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$f(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ min $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$

$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Max $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

h) $f(x) = \sin(x)(1+\cos(x))$ $\qquad$ sur $I = [0; 2\pi]$

$f'(x) = \cos(x)(1+\cos(x)) + \sin(x)\cdot(-\sin(x)) = \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$

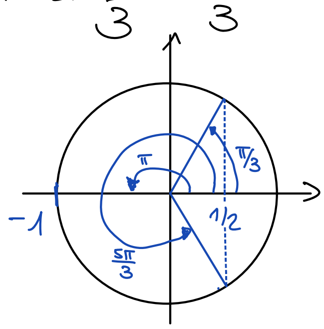
zéros de f': $\quad \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 \quad (*)$

Comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$(*) \Rightarrow \cos(x) + \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

chgmt variable
$y = \cos(x)$: $\quad 2y^2 + y - 1 = 0 \quad , \quad \Delta = 9$

$y_{1,2} = \dfrac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \overset{\text{sur } I}{\Rightarrow} x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \\ -1 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

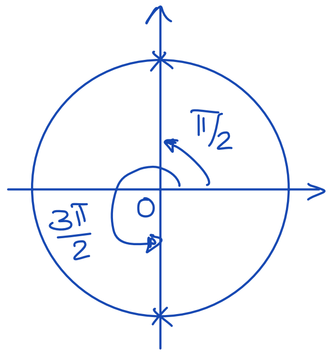


x	0		$\pi/3$		π		$5\pi/3$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	palier	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Max $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ $\qquad$ palier $(\pi; 0)$ $\qquad$ min $\left(\frac{5\pi}{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Ex suppl. Étudier la croissance de $f(x) = 1 - 2\sin(x)$

- dérivée : $f'(x) = -2\cos(x)$
- zéro de f' : $-2\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = 0$



$$\iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ sur I : $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

- croissance :

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
sgn(f')	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	-2
crssce(f)		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

$\min\left(\frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$ et $\mathrm{Max}\left(\frac{3\pi}{2}; f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$

Ex 2. 8.10

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 = x^3(3x+4)$

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

2) zéro : $\underset{(3)}{0}$ et $-\frac{4}{3}$

signe :

x		$-4/3$		0	
f	$+$	0	$-$	$\underset{(3)}{0}$	$+$

3) AV/trou : aucun(e) car pas de v.i.

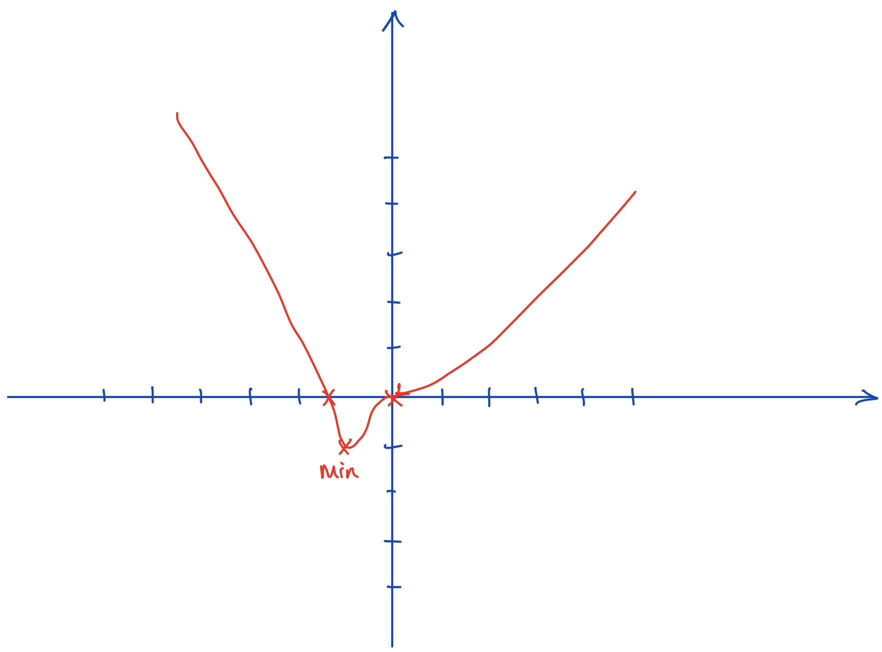
AH/AO : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ pas d'AH (et pas d'AO)

4) croissance : $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$ zéros : $\underset{(2)}{0}$ et -1

x		-1		0	
f'	$-$	0	$+$	$\underset{(2)}{0}$	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	palier	$\nearrow$

min $(-1;-1)$
palier $(0;0)$

5) graphe



d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2} = \dfrac{2x^2}{(3-x)(3+x)}$ ← zéro : 0 (2) ← v.i. : ±3

1. $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

2. signe :

x		-3		0		3	
sgn(f)	$-$	$\|\|$	$+$	0 (2)	$+$	$\|\|$	$-$

$f(1000) : \dfrac{+}{-} = -$

3. AV/trou : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{18}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = -3$ est une AV

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{18}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = 3$ est une AV

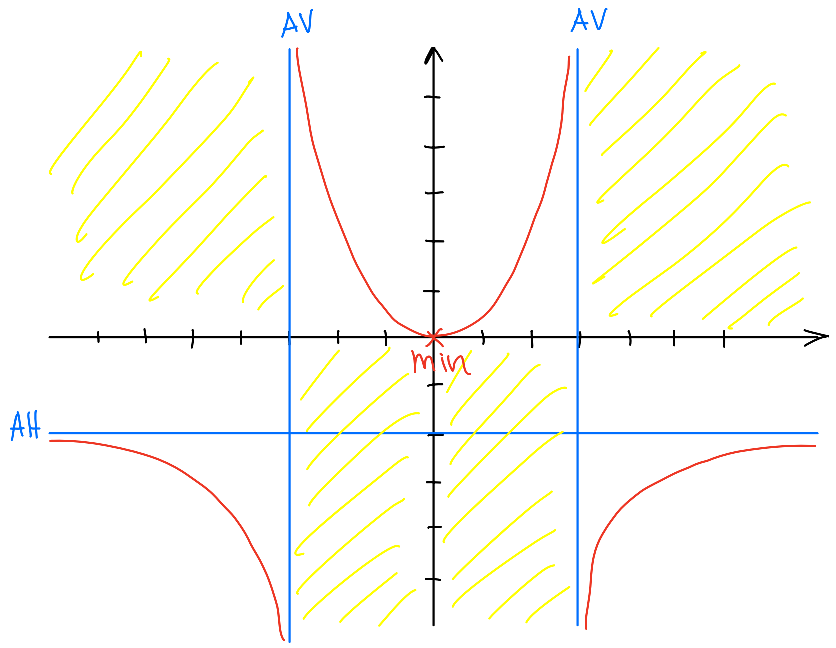
AH/AO : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}_{-1}} = -2 \Rightarrow y = -2$ est une AH.
(sans position relative)

4. croissance :

$f'(x) = \dfrac{4x(9-x^2) - 2x^2(-2x)}{(9-x^2)^2} = \dfrac{36x - 4x^3 + 4x^3}{(9-x^2)^2} = \dfrac{36x}{(9-x^2)^2}$ ← zéro : 0 ← v.i. ±3 (2)

x		-3		0		3	
sgn(f')	$-$	$\|\|$ (2)	$-$	0	$+$	$\|\|$ (2)	$+$
f	↘	$\|\|$	↘	min	↗	$\|\|$	↗

$f(0) = 0 \Rightarrow \min(0;0)$



f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2} = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-4x+4}$

zéro : -1 (3)
v.i : 2 (2)

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2) signe :

x		-1		2	
sgn(f)	$-$	0	$+$	‖	$+$
		(3)		(2)	

3) AV / trou : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \overset{\text{"}\frac{27}{0}\text{"}}{=} \infty \Rightarrow$ AV en $x=2$

AH / AO : $\deg(N) = \deg(D) + 1 \Rightarrow$ AO

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & +3x & +1 & x^2-4x+4 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +4x^2 & -4x & & x+7 \\
\cline{1-4}
 & 7x^2 & -x & +1 & \\
 & -7x^2 & +28x & -28 & \\
\cline{2-4}
 & & 27x & -27 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ AO en $y = x+7$

$f(x) = x+7+\underbrace{\dfrac{27x-27}{x^2-4x+4}}_{=\delta(x)}$

zéro de $\delta(x)$: $27x-27=0 \Leftrightarrow x=1$

x		1		2	
sgn(δ)	$-$	0	$+$	‖	$+$
f par rapport à l'AO	dessous	I	dessus	‖	dessus

le graphe de f coupe l'AO en $I(1;f(1)) = (1;8)$

4) Croissance : $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2(2-x)^2 + 2(x+1)^3(2-x)}{(2-x)^4}$

$u = (x+1)^3$
$u' = 3(x+1)^2 \cdot 1$
$= 3(x+1)^2$

$v = (2-x)^2$
$v' = 2(2-x)\cdot(-1)$
$= -2(2-x)$

$= \dfrac{(x+1)^2\cancel{(2-x)}\left[3(2-x)+2(x+1)\right]}{(2-x)^{\cancel{4}\,3}}$

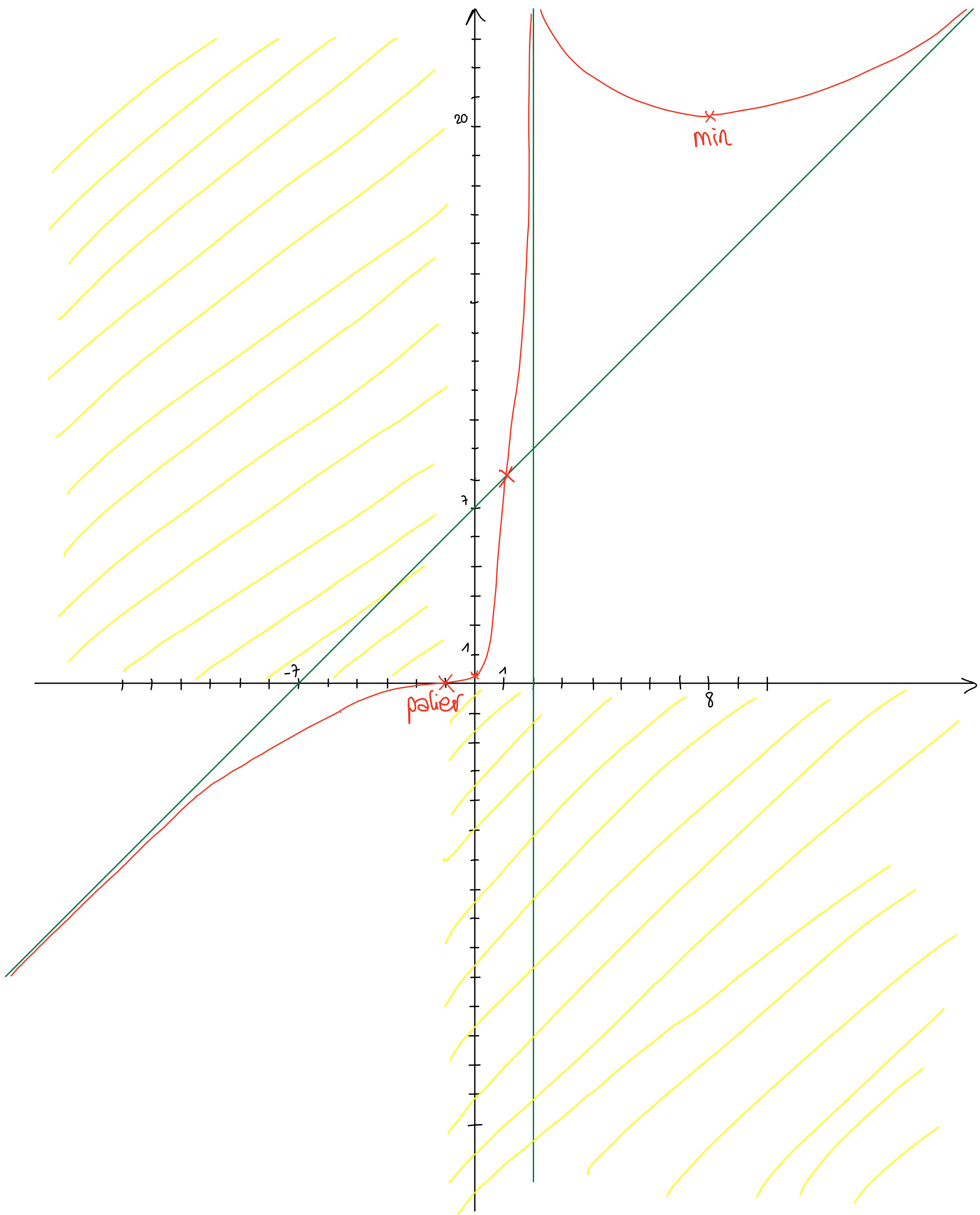
$= \dfrac{(x+1)^2(8-x)}{(2-x)^3}$

zéros : -1 (2) et 8
v.i. : 2 (3)

x		-1 (2)		2		8	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
f	↗	palier	↗	‖	↘	min	↗

palier : $(-1;0)$ et min $\left(8;\frac{81}{4}\right)$

5) graphe :



Ex suppl. étude de fct : (suite de l'ex 2.6.1 d))

$$f(x) = \frac{x^3}{4-x^2} = \frac{x^3}{(2-x)(2+x)}$$

zéro : 0 (3)
v.i. : ± 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) signe

x		-2		0		2	
$\text{sgn}(f)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

3) AV/trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \text{"}\frac{-8}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = -2$ est une AV

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \text{"}\frac{8}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = 2$ est une AV

AH/AO : AO car $\deg(N) = 3$ et $\deg(D) = 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x^2+4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x & -x \\ \hline 4x & \end{array}$$

$\Rightarrow$ AO : $y = -x$

$\Rightarrow f(x) = -x + \underbrace{\frac{4x}{4-x^2}}_{= \delta(x)}$ ← zéro de $\delta(x)$: $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ le graphe de f coupe l'AO en $(0; f(0)) = (0;0)$

4) croissance :

$u = x^3$ $\quad v = 4-x^2$
$u' = 3x^2$ $\quad v' = -2x$

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2)+(+2x^4)}{(4-x^2)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

← zéros : 0 (2) $\quad \pm\sqrt{12} \cong \pm 3{,}5$
← v.i : ± 2 (2)

x		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
f'	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
f	↘	min	↗	$\Vert$	↗	palier	↗	$\Vert$	↗	Max	↘

$f(-\sqrt{12}) \cong 5{,}2 \quad \Rightarrow \sim \min(-3{,}5 \; ; \; 5{,}2)$

palier $(0;0)$

$f(\sqrt{12}) \cong -5{,}2 \quad \Rightarrow \sim \text{Max}(3{,}5 \; ; \; -5{,}2)$

5) graphe :