Principes fondamentaux

Ex 3.1.1

$$25 \cdot 24 \cdot 23 = 13'800 \text{ choix.}$$

Ex 3.1.2

$$20 \cdot 20 \cdot 20 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 20^3 + 6^3 = 8'216 \text{ mots.}$$

Ex 3.1.3

a) $3 \cdot 3 \cdot \overset{\text{2 ou 4}}{2} = 18$ nombres pairs.

variante : $3 \cdot 3 \cdot \overset{2}{1} + 3 \cdot 3 \cdot \overset{4}{1} = 9 + 9 = 18$ nombres pairs.

b) au moins une fois le chiffre 1 :

tous les nombres − ceux qui ne contiennent pas le chiffre 1

$$18 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 18 - 8 = 10 \text{ nombres.}$$

variante :

exactement 1 fois le chiffre 1 : $\overset{1}{1} \cdot \overset{\text{2 ou 4}}{2} \cdot \overset{\text{2 ou 4}}{2} + \overset{\text{2 ou 4}}{2} \cdot \overset{1}{1} \cdot \overset{\text{2 ou 4}}{2} = 8$

ou " 2 fois " " : $\overset{1}{1} \cdot \overset{1}{1} \cdot \overset{\text{2 ou 4}}{2} = 2$

$\Rightarrow \quad 8 + 2 = 10$ nombres.

Ex 3.1.4

$$8 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 2 = 720 \text{ manières}$$

La notation factorielle

Ex 3.2.1

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ manières de procéder.

Ex 3.2.2

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ façons de s'asseoir sur un banc.

Ex 3.2.3

$9! \cdot 5 = 1'814'400$ secondes $= 504$ heures.

Ex 3.2.4

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $10! = 3'628'800$ avec m.à c. $\boxed{10}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{3}$

d) $2!\,3! = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 12$ e) f) g) .... avec m.à.c.

h) et i) trop grand nombre pour notre màc.

Ex 3.2.5

a) $$\frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1'320$$

b) $$\frac{11!}{3!\,2!\,4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 138'600$$

c) $$\frac{12!}{8!\,4!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{4 \cdot 3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

d) $$\frac{100!}{98!\,5!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5!} = \frac{10\cancel{0} \cdot 99}{12\cancel{0}} = \frac{990}{12} = \frac{165}{2}$$

e) $$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)\cancel{(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{(n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}} = n(n-1)$$

f) $$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = (n+2)(n+1)n$$

Permutations

Ex 3.3.1

$P_8 = 8! = \underline{40'320}$ façons

Ex 3.3.2

Merci : $P_5 = 5! = \underline{120}$ anagrammes

Entente : $\overline{P}_7(3;2;2) = \dfrac{7!}{3!\,2!\,2!} = \underline{210}$ anagrammes

Ex 3.3.3

a) $P_{12} = 12! = \underline{479'001'600}$ possibilités

b) tomes 1 et 2 occupent une seule "place", il n'y a donc plus qu'11 objets à permuter.

$$\underbrace{T_1T_2}_{11} \cdot \underbrace{\quad}_{10} \cdot \;\underbrace{\quad}\; \cdots \underbrace{\quad}_{1} = P_{11} = 11! = \underline{39'916'800} \text{ possibilités.}$$

c) tomes 1 et 2 occupent une seule "place" mais peuvent permuter entre eux.

$P_{11} \cdot P_2 = 11! \cdot 2! = \underline{79'833'600}$ possibilités.

nbre de permutations des tomes 1 et 2.

Ex 3.3.4

$P_9 = 9! = \underline{362'880}$ nombres

Arrangements

Ex 3.4.1

a) 4 chiffres distincts avec 6 chiffres à disposition.

$$A_4^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{360} \text{ nombres}$$

b) 4 chiffres avec 6 chiffres à disposition.

$$\overline{A_4^6} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = \underline{1'296} \text{ nombres}$$

Ex 3.4.2

a)

$$A_5^8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{6'720} \text{ façons}$$

b)

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = P_3 \cdot A_2^5 = \underline{120} \text{ façons}$$

3 voitures direction sur 3 places

et 2 voitures sur 5 places dispo

Ex 3.4.3

sans remise (pas de répétition) : $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = A_5^7 = \underline{2'520}$ tirages

avec remise (avec répétitions) : $7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 = 7^5 = \overline{A_5^7} = \underline{16'807}$ tirages

Ex 3.4.4

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{10} = \overline{A_{10}^2} = \underline{1'024} \text{ résultats}$$

Combinaisons

Ex 3.5.1

$C_4^{15} = \left(\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!}\right) = \underline{1'365}$ compositions.

Ex 3.5.2

$C_2^{12} = \left(\frac{12 \cdot 11}{2}\right) = \underline{66}$ poignées de mains

Ex 3.5.3

a) $C_7^{12} = \underline{792}$ façons.

b) i) $C_4^8 \cdot C_3^4 = 70 \cdot 4 = \underline{280}$ façons

ii) au moins 1 : tout − aucun gerbera

$C_7^{12} - C_7^8 = 792 - 8 = \underline{784}$ façons

Problèmes mélangés

Ex 3.6.1

a) personnes.

$\overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} = A_5^6 = \underline{720}$ possibilités

b) $\overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = P_6 = \underline{720}$ possibilités aussi

Ex 3.6.2

$$\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 2^6 = \overline{A}_6^2 = \underline{64}$$ symboles (espace compris)

ou $\underline{63}$ symboles en enlevant l'espace (6 points "plats")

Ex 3.6.3

a) $\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} = 26^4 = \overline{A}_4^{26} = \underline{456'976}$ mots

b) $\overline{26} \cdot \overline{25} \cdot \overline{24} \cdot \overline{23} = A_4^{26} = \underline{358'800}$ mots

Ex 3.6.4

$C_{13}^{52} = \underline{6{,}4 \cdot 10^{11}}$ mains

Ex 3.6.5

1) $\overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} = A_3^6 = \underline{120}$ nombres

2) $\overset{2 \text{ ou } 3}{\overline{2}} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} = A_1^2 \cdot A_2^5 = \underline{40}$ nombres

3) $\overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overset{3 \text{ ou } 5 \text{ ou} \dots}{\overline{4}} = A_1^4 \cdot A_2^5 = \underline{80}$ nombres

4) $\overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overset{5}{\overline{1}} = A_1^1 \cdot A_2^5 = \underline{20}$ nombres

Ex 3.6.6

$$\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underbrace{5!}_{\text{permutations des 5 couleurs}} = 6^5\cdot 5! = 933'120 \text{ façons}$$

Ex 3.6.7

$$10\cdot 4\cdot 11\cdot 9 = 3'960 \text{ menus}$$

Ex 3.6.8

5 personnes choisissent parmi 8 sorties

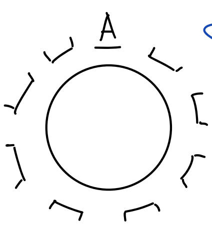
$$\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{8} = 8^5 = \overline{A}^8_5 = 32'768 \text{ manières}$$

$$\underline{8}\cdot\underline{7}\cdot\underline{6}\cdot\underline{5}\cdot\underline{4} = A^8_5 = 6720 \text{ manières}$$

Ex 3.6.9

Question suppl : Neuf personnes prennent place sur un banc. De combien de manières peuvent-elles se disposer : $P_9 = 9! = 362'880$

a)



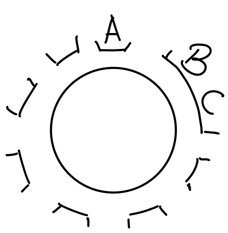
On place une personne A puis il reste 8 personnes à placer par rapport à A

$$\Rightarrow \quad P_8 = 8! = 40'320 \text{ manières}$$

Variante : $\dfrac{P_9}{9} = \dfrac{9!}{9} = 8! = 40'320$

nbre de rotations autour de la table qui ne modifient pas la pos. rel.

b)



Si B et C doivent être côte à côte, il n'y a plus que 7 (= 6+BC) "personnes" à placer.

$$\Rightarrow \quad P_7\cdot P_2 = 7!\cdot 2! = 10'080 \text{ manières}$$

permutation de B et C.

Ex 3.6.10

$$P_{10}(5;2;3) = \frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520 \text{ façons}$$

Ex 3.6.11

1) $\overline{P_{11}}(4;4;2) = \dfrac{11!}{4!\,4!\,2!} = \underline{34'650}$ anagrammes

2) $\underbrace{S}_{1} \cdot \; \ldots \ldots \; \underbrace{S}_{1} \cdot = \overline{P_9}(4;2;2) = \dfrac{9!}{4!\,2!\,2!} = \underline{3'780}$ anagrammes

Ex 3.6.12

$\underbrace{T,L,S}_{3} \cdot \ldots \underbrace{\ldots}_{2} \cdot \ldots \underbrace{\ldots}_{1} = P_3 \cdot \overline{P_5}(2;2) = 3! \cdot \dfrac{5!}{2!\,2!} = \underline{180}$ mots

Ex 3.6.13

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pas de A :} & P_4 = 4! = 24 \\ \text{exactement 1 A :} & C_3^4 \cdot P_4 = 96 \\ \text{" } 2\text{ A :} & C_2^4 \cdot \overline{P_4}(2) = 72 \\ 3\text{ A :} & C_1^4 \cdot \overline{P_4}(3) = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow 24 + 96 + 72 + 16 = \underline{208} \text{ mots}$$

Ex 3.6.14

a) $P_8 = 8! = \underline{40'320}$ manières

b) $\underbrace{AB}\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ = P_7 \cdot P_2 = 2 \cdot 5'040 = \underline{10'080}$ manières

c) $\underbrace{H}_{4} \cdot \underbrace{F}_{4} \cdot \underbrace{H}_{3} \cdot \underbrace{F}_{3} \cdot \underbrace{\ldots}_{2} \cdot \underbrace{\ldots}_{2} \cdot \underbrace{\_}_{1} \cdot \underbrace{\_}_{1}$ ou $\underbrace{F}_{4} \cdot \underbrace{H}_{4} \cdot \underbrace{F}_{3} \cdot \underbrace{\_}_{3} \cdot \ldots$

$= P_4 \cdot P_4 + P_4 \cdot P_4$

$= 2 \cdot P_4 \cdot P_4 = \underline{1'152}$

d) $\underbrace{\quad H \quad}\,\_\,\_\,\_\,\_ = P_4 \cdot P_5 = \underline{2'880}$ manières

e) $\_\;\_\;\_\;\_$

$P_4 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = \underline{384}$ manières

Ex 3.6.15

$$C_2^{12} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66 \text{ parties}$$

Ex 3.6.16

a) $$C_4^{25} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4!} = 12'650 \text{ comités}$$

b) $$A_4^{25} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303'600 \text{ comités}$$

Ex 3.6.17

$$C_5^{10} \cdot C_2^{6} = 252 \cdot 15 = 3780 \text{ commissions}$$

Ex 3.6.18

$$C_9^{36} \cdot C_9^{27} \cdot C_9^{18} \cdot C_9^{9} \cong 2{,}1 \cdot 10^{19} \text{ distributions}$$

Ex 3.6.19

a) $$C_8^{10} = 45 \text{ choix}$$

b) i) $$C_3^{3} \cdot C_5^{7} = 1 \cdot C_5^{7} = 21 \text{ choix}$$

ii) exactement 4 ou exactement 5

$$C_4^{5} \cdot C_4^{5} + C_5^{5} \cdot C_3^{5} = 25 + 10 = 35 \text{ choix}$$

variante : "tout − ni 4 ni 5" $\Leftrightarrow$ "tout − exactement 3"

$$C_8^{10} - C_3^{5} \cdot C_5^{5} = 45 - 10 \cdot 1 = 35 \text{ choix}$$

Ex 3.6.20

a) $$C_4^{4} \cdot C_1^{32} = 1 \cdot 32 = 32 \text{ manières}$$

b) $$C_2^{4} \cdot C_2^{4} \cdot C_1^{28} = 6 \cdot 6 \cdot 28 = 1'008 \text{ manières}$$

c) "au moins un as" $\Leftrightarrow$ "tout − aucun as"

$$C_5^{36} - C_5^{32} = 175'616 \text{ manières}$$

Ex 3.6.21

$\overline{P}_8(4;4) = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$ réponses $= C_4^8 \cdot \underbrace{C_4^4}_{=1} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$

Ex 3.6.22

$\underbrace{\_\_}_{3}^{1,x,2} \cdot \underbrace{\_\_}_{3} \cdot \_\_ \; \_\_ \; \cdots \cdot \underbrace{\_\_}_{3}$

$3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = \overline{A}_{13}^{3} = 3^{13} = 1'594'323$ pronostics

Ex 3.6.23

1) $\overline{A}_{20}^{2} = 2^{20} = 1'048'576$ séquences

2) $\overline{P}_{20}(19) = \frac{20!}{19!} = 20 = C_1^{20}$

3) $\overline{P}_{20}(4,16) = \frac{20!}{4!\,16!} = 4845 = C_4^{20} = C_{16}^{20}$

4) $\overline{P}_{20}(10,10) = \frac{20!}{10!\,10!} = 184'756 = C_{10}^{20}$

5) $1 = \overline{P}_{20}(20) = \frac{20!}{20!} = C_{20}^{20}$

Ex 3.6.24

1) $C_6^{45} = 8'145'060$ façons

2) $1 = C_6^6$ poss. d'avoir les 6 "bons" numéros

3) $C_6^{39} = 3'262'623$ poss. d'avoir aucun "bon" numéro

4) $C_3^6 \cdot C_3^{39} = 20 \cdot 9139 = 182'780$ poss. d'avoir 3 "bons" num.

Ex 3.6.25

a) $C_3^{12} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \underline{220}$ tirages

b) $A_3^{12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = \underline{1320}$ tirages

c) $\overline{A_3^{12}} = 12 \cdot 12 \cdot 12 = \underline{1'728}$ tirages

Ex 3.6.26

$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = \underline{59'049}$ possibilités.

Ex 3.6.27

a) $C_5^{40} = \underline{658'008}$ comités

b) $C_3^{25} \cdot C_2^{15} = 2'300 \cdot 105 = \underline{241'500}$ comités

c) exact. 3 dames ou exact. 4 ou exact. 5

$$C_3^{25} \cdot C_2^{15} + C_4^{25} \cdot C_1^{15} + C_5^{25}$$

$$= 241'500 + 189'750 + 53'130 = \underline{484'380}$$

Ex 3.6.28

$$\frac{C_2^7 \cdot C_2^5}{P_2} = \frac{21 \cdot 10}{2} = \underline{105} \text{ possibilités} \qquad \left(= \frac{\overline{P}_7(2;2;3)}{P_2} \right)$$

Ex 3.6.29

$$\frac{C_5^{15} \cdot C_5^{10} \cdot C_5^5}{P_3} = \frac{3'003 \cdot 252 \cdot 1}{6} = \underline{126'126} \qquad \left(= \frac{\overline{P}_{15}(5;5;5)}{P_3} \right)$$

Ex 3.6.30

$$\overline{P}_8(4;3) = \frac{8!}{4!\,3!} = \underline{280} \text{ signaux}$$

Ex 3.6.31

a) $19 \cdot 18 \cdot 17 = A_3^{19} = \underline{5814}$ façons

b) $19 \cdot 19 \cdot 19 = \overline{A}_3^{19} = \underline{6859}$ façons

c) $C_3^{19} = \underline{969}$ façons

Ex 3.6.32

a) $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{10 \cdot 10 \cdot \ldots} = 10^5 = \overline{A}_5^{10} = \underline{100'000}$ séquences

b) $\underbrace{C_2^9}_{\text{2 chiffres diff. parmi 9}} \cdot \overline{P}_5(3) + \underbrace{C_1^9}_{\text{1 chiffre parmi 9 (qui sera répété)}} \cdot \overline{P}_5(3;2) = 36 \cdot \frac{5!}{3!} + 9 \cdot \frac{5!}{3!\,2!}$

$= 720 + 90 = \underline{810}$ séquences

variante : $\underbrace{C_3^5}_{\text{position des 7}} \cdot A_2^9 = 10 \cdot 9^2 = 810$

c) $\underbrace{810}_{b)} + C_1^9 \overline{P}_5(4) + C_5^5 = 810 + 45 + 1 = \underline{856}$ séquences

variante : $810 + C_4^5 \cdot A_1^9 + C_5^5$

d) tout - aucun 7 : $10^5 - 9^5 = \underline{40'951}$ séquences

Ex 3.6.36

a) $\overline{P}_7(2,3,2) = \dfrac{7!}{2!3!2!} = \underline{210}$ nombres

b) $\underline{1}\ \underline{1}\ \_\ \dots$ ou $\underline{1}\ \underline{2}\ \_\ \dots$

$\overline{P}_5(3,2) + \overline{P}_5(2,2) = \dfrac{5!}{3!2!} + \dfrac{5!}{2!2!} = 10+30 = \underline{40}$

Ex 3.6.37

a) forcément 4 bleus : $C_4^5 = \underline{5}$ façons

b) $RB : C_4^8 - C_4^5 = 70-5 = 65$ pas tous bleus

$RV : C_4^5 = 5$

$BV : C_4^7 - C_4^5 = 35-5 = 30$

$\Rightarrow 65+5+30 = \underline{100}$ façons

c) $2R1B1V = C_2^3 \cdot C_1^5 \cdot C_1^2 = 3\cdot5\cdot2 = 30$

$1R2B1V = C_1^3 \cdot C_2^5 \cdot C_1^2 = 3\cdot10\cdot2 = 60$

$1R1B2V = C_1^3 \cdot C_1^5 \cdot C_2^2 = 3\cdot5\cdot1 = 15$

$\Rightarrow 30+60+15 = \underline{105}$ façons

(variante : tout − tous de la même couleur − 2 couleurs
a) b)

$C_4^{10} - 100 - 5 = 210 - 105 = 105$

Ex 3.6.39

a) $C_3^{36} = \underline{7'140}$ mains

b) $C_3^{4} = \underline{4}$ mains

c) $C_1^{4} \cdot C_2^{4} = \underline{24}$ mains

d) $C_3^{32} = \underline{4960}$ mains

e) "total − aucun as" : $7'140 - 4960 = \underline{2180}$ mains

f) $C_1^{4} \cdot C_2^{32} = \underline{1984}$ mains ⚠ erreur solution brochure