

Ex 2.1.1

a) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

cerce de centre $C(5; -2)$ et $r=5$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 64$

" " $C(-2; 0)$ et $r=8$

c) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$

c'est un point $(5; -2)$ ($r=0$)

d) $x^2 + (y-5)^2 = 5$

cerce de centre $C(0; 5)$ et $r=\sqrt{5}$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \quad \text{cerce de centre } \underline{C(1; -2)} \text{ et } \underline{r=5}$$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -14 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -9 \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{neg.} \end{matrix} \quad \underline{\text{pas un cerce.}}$$

g) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -5 + 4 + 1$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0 \quad \text{c'est un } \underline{\text{point}} \quad (-2; 1)$$

h) $x^2 + y^2 + x = 0$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = 0 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{cerce de centre } \underline{C(-\frac{1}{2}; 0)} \text{ et } \underline{r=\frac{1}{2}}$$

i) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -14 + 9 + 4$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = -1 \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{neg.} \end{matrix} \quad \underline{\text{ce n'est pas un cerce}}$$

j) $x^2 + y^2 + y = 0$

$$x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{cerce de centre } \underline{C(0; -\frac{1}{2})} \text{ et } \underline{r=\frac{1}{2}}$$

Ex 2.1.2

a) $C(0;0)$ et $r=3$: $x^2+y^2=9$

b) $C(2;-3)$ et $r=7$: $(x-2)^2+(y+3)^2=49$

c) $C(6;-8)$ et passe par $O(0;0)$: $\gamma: (x-6)^2+(y+8)^2=r^2$

1^{re} méthode: $O \in \gamma \Rightarrow (0-6)^2+(0+8)^2=36+64=100=r^2$
($r=10$)

$\Rightarrow \gamma: \underline{(x-6)^2+(y+8)^2=100}$

2^{de} méthode: $r = \|\vec{OC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \dots$

d) $C(-1;2)$ et passe par $A(2;6)$: $\gamma: (x+1)^2+(y-2)^2=r^2$

1^{re} méthode: $A \in \gamma \Rightarrow (2+1)^2+(6-2)^2=9+16=25=r^2$ ($r=5$)

$\Rightarrow \gamma: \underline{(x+1)^2+(y-2)^2=25}$

2^{de} méthode: $r = \|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \dots$

e) $A(3;2)$, $B(-1;6)$ diamètre :

centre : milieu de AB : $M_{AB} \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (-1;4)$

$\Rightarrow \gamma: (x-1)^2+(y-4)^2=r^2$

1^{re} méthode: $A \in \gamma \Rightarrow (3-1)^2+(2-4)^2=4+4=8=r^2$ ($r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$)

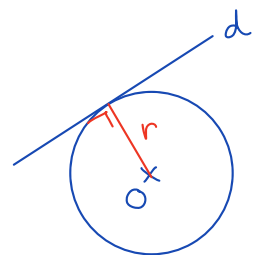
$\Rightarrow \gamma: \underline{(x-1)^2+(y-4)^2=8}$

(2^{de} méthode: $r = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \|\vec{AM}_{AB}\| = \dots$)

f) $C(0;0)$ et tgt à $d: 3x-4y+20=0$

$r = \delta(C; d) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$

$\Rightarrow \gamma: \underline{x^2+y^2=16}$

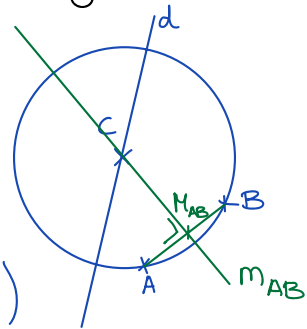


g) $C(1;-1)$ et tgt à $d: 5x-12y+9=0$

$r = \delta(C; d) = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \gamma: \underline{(x-1)^2+(y+1)^2=4}$

h) passe par $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et $C \in d: 3x-y-2=0$

le centre se trouve sur
la médiatrice de AB



$$* m_{AB}: \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$$

(vecteur normal de m_{AB})
car \perp à AB

$$\Rightarrow m_{AB}: -2x+y+c=0 \text{ et}$$

$$M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = (1; 2) \in m_{AB} \Rightarrow -2 \cdot 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AB}: -2x+y=0}$$

$$* C \in d \cap m_{AB} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=2 & | & 1 \\ -2x+y=0 & | & 1 \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 - y = 2 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow C(2; 4)$$

$$\Rightarrow \gamma: (x-2)^2 + (y-4)^2 = r^2 \text{ et}$$

$$A \in \gamma \Rightarrow (3-2)^2 + (1-4)^2 = 1+9 = 10 \Rightarrow \underline{\gamma: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10}$$

($r = \sqrt{10}$)

i) passe par $A(1;1)$ $B(1;-1)$ et $C(2;0)$

$$* m_{AB}: \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}} \quad (\text{vecteur vertical})$$

$$\Rightarrow y+c=0 \quad (\text{droite horizontale})$$

$$M_{AB}\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1; 0) \in m_{AB} \Rightarrow 0+c=0 \Leftrightarrow c=0$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AB}: y=0} \quad (\text{c'est l'axe } Ox)$$

$$* m_{AC}: \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AC}} \Rightarrow x-y+c=0$$

$$M_{AC}\left(\frac{1+2}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \in m_{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \underline{m_{AC}: x-y-1=0}$$

$$* K = m_{AB} \cap m_{AC} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow K(1; 0)$$

$$\Rightarrow \gamma: (x-1)^2 + y^2 = r^2$$

$$A \in \gamma \Rightarrow (1-1)^2 + 1^2 = 0+1 = 1 = r^2 \Rightarrow \underline{\gamma: (x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Ex 2.1.3

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 2x-3 \\ 2x-y-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3x + 2y &= 3 \\ (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 2y + 1) &= 3 + \frac{9}{4} + 1 \\ (x - \frac{3}{2})^2 + (y+1)^2 &= \frac{25}{4} \\ \Rightarrow C(\frac{3}{2}; -1) \text{ et } r &= \frac{\sqrt{5}}{2} u \end{aligned}$$

$$S(C; d) = \frac{|2 \cdot \frac{3}{2} + 1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45 < \frac{5}{2} = 2,5$$

\Rightarrow sécants

Question suppl. : pls d' \cap

$$\begin{cases} (1) y = 2x-3 \\ (2) x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}} \right\} \text{substitution}$$

$$\Rightarrow x^2 + (2x-3)^2 - 3x + 2(2x-3) = 3$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 3x + 4x - 6 = 3$$

$$5x^2 - 11x = 0$$

$$x(5x-11) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 & \xrightarrow{(1)} y = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow \underline{I(0; -3)} \\ \frac{11}{5} & \xrightarrow{(1)} y = 2 \cdot \frac{11}{5} - 3 = \frac{7}{5} \Rightarrow \underline{J(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})} \end{cases}$$

$$\text{b) } x - 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = -12 + 16 + 1$$

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow C(4; -1) \text{ et } r = \sqrt{5} u$$

$$S(C; d) = \frac{|4 - 2(-1) - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \underline{\text{tangents}}$$

Question suppl. : pls d'N

$$\begin{cases} (1) & x - 2y - 1 = 0 \\ (2) & x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{substitution}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (2y+1)^2 + y^2 - 8(2y+1) + 2y + 12 = 0 \\ & 4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 16y - 8 + 2y + 12 = 0 \\ & 5y^2 - 10y + 5 = 0 \\ & y^2 - 2y + 1 = 0 \\ & (y-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \underline{T(3;1)}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & y = x + 10 & x^2 + y^2 = 1 & \Rightarrow C(0;0) = 0 \text{ et } r = 1 \text{ u} \\ & x - y + 10 = 0 & & \end{aligned}$$

$$S(C; d) = \frac{|0 - 0 + 10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 > 1$$

\Rightarrow disjoints

Ex 2.1.4

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 20y + 100 = -115 + 64 + 100$$

$$(x-8)^2 + (y-10)^2 = 49$$

$$\Rightarrow C_1(8; 10) \text{ et } r_1 = 7$$

$$\gamma_2: x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = -5 + 16 + 25$$

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 36$$

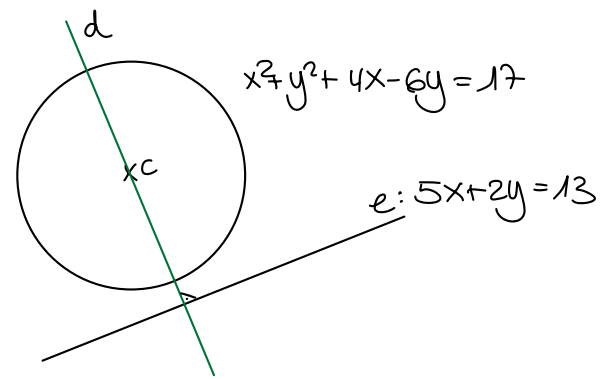
$$C_2(-4; 5) \text{ et } r_2 = 6$$

$$\vec{C_1C_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{C_1C_2}\| = \sqrt{144 + 25} = 13 = 7 + 6 = r_1 + r_2$$

\Rightarrow les cercles sont tangents extérieurement.

Ex 2.1.5

$$\begin{aligned} \bullet (x^2+4x+4) + (y^2-6y+9) &= 17+4+9 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 30 \Rightarrow C(-2;3) \\ &\text{et } r = \sqrt{30} \end{aligned}$$

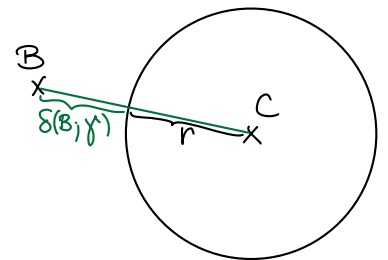


• le diamètre est \perp à e et passe par C

$$\begin{aligned} \Rightarrow d: 2x-5y+c &= 0 \\ \left. \begin{aligned} C \in d: -4-15+c &= 0 \\ c &= 19 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{d: 2x-5y+19=0} \end{aligned}$$

Ex 2.1.6

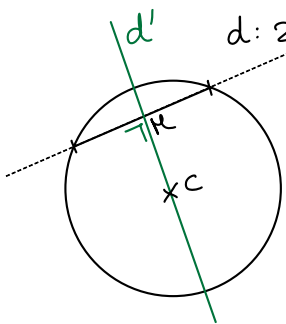
$$\begin{aligned} * x^2 - 26x + 169 + y^2 + 30y + 225 &= -313 + 169 + 225 \\ (x-13)^2 + (y+15)^2 &= 81 \\ \Rightarrow C(13; -15) \text{ et } r &= 9 \end{aligned}$$



$$* \text{ distance de } B \text{ à } C: \vec{BC} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$$

$$* \text{ distance de } B \text{ à } \gamma: \|\vec{BC}\| - r = 26 - 9 = \underline{17u}$$

Ex 2.1.7



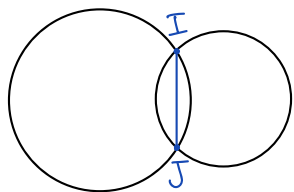
* Comme la droite cherchée passe par le milieu de la corde et par le centre du cercle (diamètre), cette droite est la médiatrice de la corde, donc perpendiculaire à d

$$\Rightarrow d': x-2y+c=0$$

$$* C(2; -1) \in d' \Rightarrow 2 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$$\Rightarrow \underline{d': x-2y-4=0}$$

Ex 2.1.8



On commence par chercher les points d'intersection des deux cercles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 \end{cases}$$

$$-16x - 12y + 40 = 0 \quad | \div (-4)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

substit.

$$\Rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right)^2 - 10x - 10\left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{80}{9}x + \frac{100}{9} - 10x + \frac{40}{3}x - \frac{100}{3} = 0 \quad | \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 16x^2 - 80x + 100 - 90x + 120x - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 50x - 200 = 0 \quad | \div 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 4 & \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot 4 + \frac{10}{3} = -2 \Rightarrow I(4; -2) \\ -2 & \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot (-2) + \frac{10}{3} = 6 \Rightarrow J(-2; 6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{IJ}\| = \sqrt{36 + 64} = \underline{\underline{10 \text{ u}}}$$

$$\left(25y^2 - 100y - 300 = 0 \right)$$

Ex 2.1.9

$$d: 4x-5y-3=0 \quad t_1: 2x-3y-10=0 \quad t_2: 3x-2y+5=0$$

* cercle lgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{2x-3y-10}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \pm \frac{3x-2y+5}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \quad | \cdot \sqrt{13}$$

$$2x-3y-10 = \pm (3x-2y+5)$$

$$\oplus \quad 2x-3y-10 = 3x-2y+5$$

$$-x-y-15 = 0$$

$$b_1: \underline{x+y+15=0}$$

$$\ominus \quad 2x-3y-10 = -3x+2y-5$$

$$5x-5y-5 = 0$$

$$b_2: \underline{x-y-1=0}$$

$$* C_1 = d \cap b_1 : \begin{cases} 4x-5y=3 & | 1 \\ x+y=-15 & | 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x-5y=3 \\ 5x+5y=-75 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9x = -72 \\ x = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2^e) \\ \Rightarrow -8+y = -15 \\ y = -7 \end{array} \Rightarrow \underline{C_1(-8; -7)}$$

$$r_1 = \delta(C_1; t_1) = \frac{|2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-7) + 10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{13}}{13}}}$$

$$\Rightarrow \underline{r_1: (x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}}$$

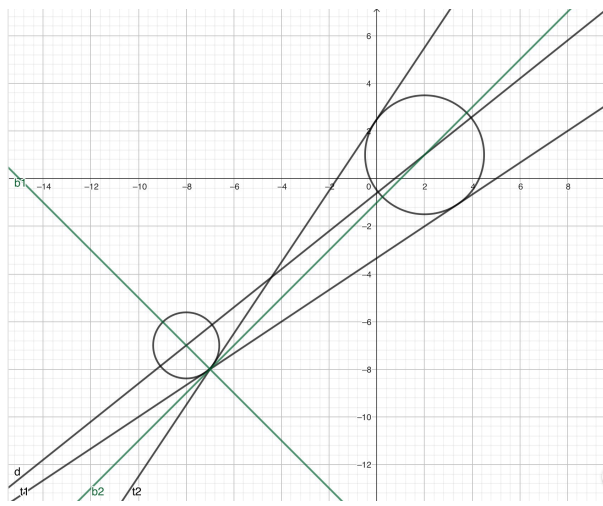
$$* C_2 = d \cap b_2 : \begin{cases} 4x-5y=3 & | 1 \\ x-y=1 & | -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x-5y=3 \\ -5x+5y=-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x = -2 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2^e) \\ \Rightarrow 2-y = 1 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{C_2(2; 1)}$$

$$r_2 = \delta(C_2; t_1) = \frac{|2 \cdot (2) - 3 \cdot (1) + 10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{9\sqrt{13}}{13}}}$$

$$\Rightarrow \underline{r_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}}$$



Ex 2.1.10

$$d: 2x + y = 0 \quad t_1: 4x - 3y + 10 = 0 \quad t_2: 4x - 3y - 30 = 0$$

* cercle rgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{4x - 3y + 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \pm \frac{4x - 3y - 30}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \quad | \cdot 5$$

$$4x - 3y + 10 = \pm (4x - 3y - 30)$$

$$\oplus: 4x - 3y + 10 = 4x - 3y - 30$$

$$40 = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\ominus: 4x - 3y + 10 = -4x + 3y + 30$$

$$8x - 6y - 20 = 0$$

$$b_2: \underline{4x - 3y - 10 = 0}$$

les droites t_1 et t_2 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice, // à t_1 et t_2 et qui se trouve au milieu des deux dîtes donc $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ (a et b identiques car //)

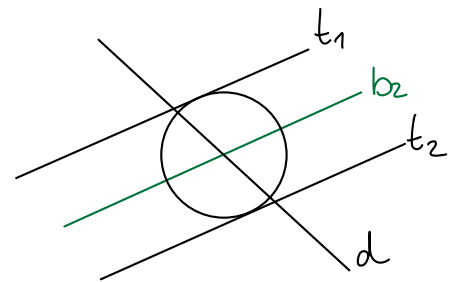
$$* C = d \cap b_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 1 \end{array} \Rightarrow + \begin{array}{l} 6x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 10 \end{array}$$

$$\frac{10x}{x} = \frac{10}{1} \quad \begin{array}{l} \text{1}^{\text{e}} \text{ eq.} \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} 2 + y = 0 \\ \Leftrightarrow y = -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{C(1; -2)}$$

$$* r = \delta(C; t_1) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{5} = \underline{4}$$

$$\Rightarrow \underline{y: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16}$$



Ex 2.1.12

* $T(1;2) \in t_1$ car $7 \cdot 1 - 2 - 5 = 0$

* cercle tgt à t_1 et t_2 donc

centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

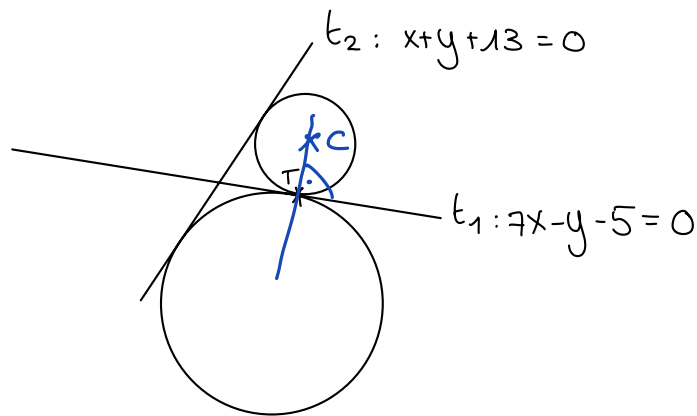
$$\frac{7x-y-5}{\sqrt{49+1}} = \pm \frac{x+y+13}{\sqrt{1+1}}$$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

$$\frac{7x-y-5}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{5(x+y+13)}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 7x-y-5 = \pm 5(x+y+13)$$

$$\begin{aligned} \oplus \quad 7x-y-5 &= 5x+5y+65 \\ 2x-6y-70 &= 0 \\ \underline{b_1: x-3y-35} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ominus \quad 7x-y-5 &= -5x-5y-65 \\ 12x+4y+60 &= 0 \\ \underline{b_2: 3x+y+15} &= 0 \end{aligned}$$



* Comme T est le point de contact (ou de tangence) et que $T \in t_1$, le centre se trouve sur une droite p perpendiculaire à t_1 (la tangente et la droite passant par le centre et le point de tangence sont lrs perpendiculaires.)

$\Rightarrow p: x+7y+c=0$ et

$T \in p \Rightarrow 1+7 \cdot 2+c=0 \Leftrightarrow c=-15 \Rightarrow \underline{p: x+7y-15=0}$

* $C_1 = p \cap b_1: \begin{cases} x+7y=15 & | & 1 \\ x-3y=35 & | & -1 \end{cases} \begin{array}{l} x+7y=15 \\ \underline{-x+3y=-35} \\ 10y=-20 \Leftrightarrow y=-2 \end{array}$

$\xrightarrow{1^{\text{e}} \text{eq.}} \Rightarrow x-14=15 \Leftrightarrow x=29 \Rightarrow C_1(29; -2)$

* $r_1 = \delta(C_1; t_2) = \frac{|29-2+13|}{\sqrt{1+1}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ ou $\delta(C_1; T) = \|\vec{C_1T}\|$

$\Rightarrow \underline{\gamma_1: (x-29)^2 + (y+2)^2 = 800}$

$$* C_2 = p \cap b_2 : \begin{cases} x+7y=15 & | \cdot 3 \\ 3x+y=-15 & | \cdot (-1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3x+21y=45 \\ -3x-y=15 \\ \hline 20y=60 \end{array} \Leftrightarrow y=3$$

1^{re} eq.
 $\Rightarrow x+21=15 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow C(-6; 3)$

$$* r_2 = \delta(C_2; t_2) = \frac{|-6+3+13|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_1: (x+6)^2 + (y-3)^2 = 50}$$

Ex 2.1.14

$$d_1: 4x - 3y - 10 = 0$$

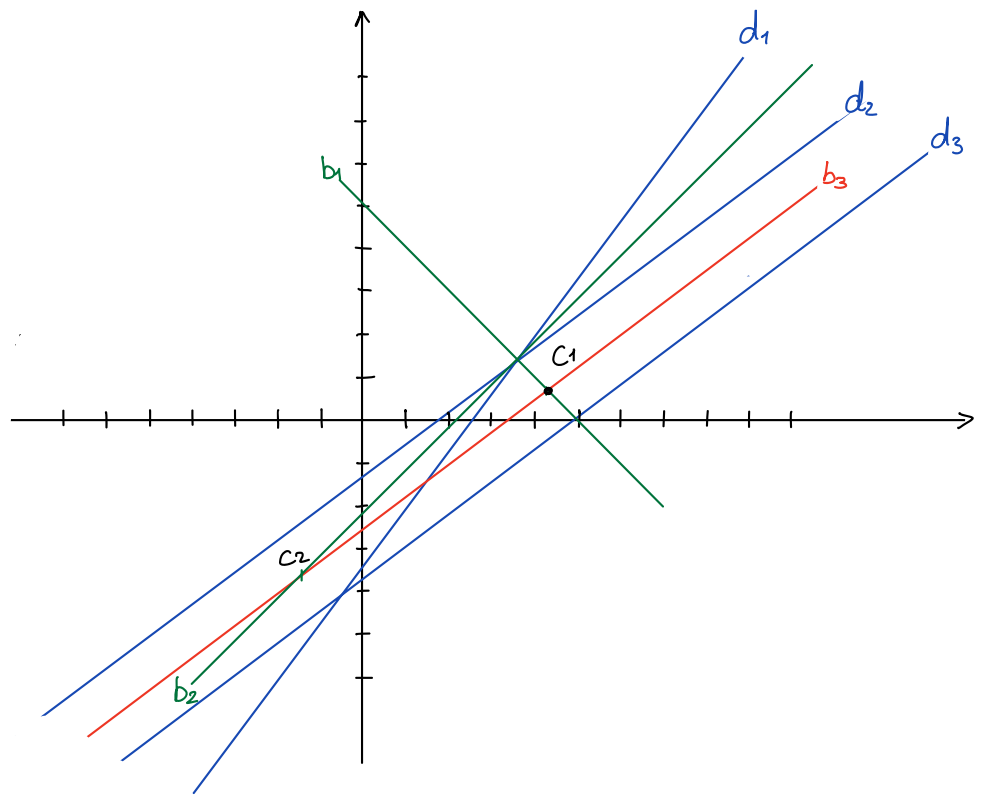
$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

$$d_2: 3x - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$d_3: 3x - 4y - 15 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$$



On cherche un cercle tangent à trois droites, le centre est donc à l'intersection des bissectrices.

$$\begin{aligned} \star \text{ bissectrices de } d_1 \text{ et } d_2 : & \quad \frac{4x - 3y - 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \pm \frac{3x - 4y - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad | \cdot 5 \\ & \quad 4x - 3y - 10 = \pm (3x - 4y - 5) \end{aligned}$$

$$\oplus : 4x - 3y - 10 = 3x - 4y - 5$$

$$b_1: x + y - 5 = 0$$

$$\ominus : 4x - 3y - 10 = -3x + 4y + 5$$

$$b_2: 7x - 7y - 15 = 0$$

$$\begin{aligned} \star \text{ bissectrices de } d_2 \text{ et } d_3 : & \quad \frac{3x - 4y - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{3x - 4y - 15}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad | \cdot 5 \\ & \quad 3x - 4y - 5 = \pm (3x - 4y - 15) \end{aligned}$$

$$\oplus : 3x - 4y - 5 = 3x - 4y - 15$$

$$10 = 0 \quad \text{⚡}$$

$$\ominus : 3x - 4y - 5 = -3x + 4y + 15$$

$$6x - 8y - 20 = 0$$

$$b_3: 3x - 4y - 10 = 0$$

les droites d_2 et d_3 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice // à d_2 et d_3 et qui se trouve au milieu des deux dites donc $c = \frac{c_2 + c_3}{2}$ (a et b identiques car //)

Il y'a deux cercles et les centres se trouvent à l'intersection de $b_1 \cap b_3$ et de $b_2 \cap b_3$ (comme on le voit sur le graphique)

$$* b_1 \cap b_3 : \begin{cases} x+y-5=0 & | 4 \\ 3x-4y-10=0 & | 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} 4x+4y-20=0 \\ 3x-4y-10=0 \\ \hline 7x-30=0 \\ x = \frac{30}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{7} + y - 5 = 0 \\ y = 5 - \frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow C_1 \left(\frac{30}{7} ; \frac{5}{7} \right)$$

$$r_1 = \delta(C_1; d_1) = \frac{|4 \cdot \frac{30}{7} - 3 \cdot \frac{5}{7} - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{f_1 : \left(x - \frac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = 1}$$

$$* b_2 \cap b_3 : \begin{cases} 7x-7y-15=0 & | -3 \\ 3x-4y-10=0 & | 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} -21x+21y+45=0 \\ 21x-28y-70=0 \\ \hline -7y-25=0 \\ y = -\frac{25}{7} \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x - 4 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) - 10 = 0$$

$$3x = -\frac{100}{7} + 10 = -\frac{30}{7}$$

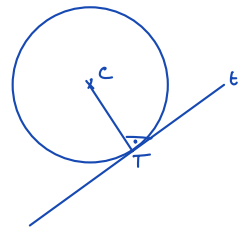
$$x = -\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow C_2 \left(-\frac{10}{7} ; -\frac{25}{7} \right)$$

$$r_2 = \delta(C_2; d_1) = \frac{|4 \cdot \left(-\frac{10}{7}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{f_2 : \left(x + \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{7}\right)^2 = 1}$$

Ex 2.1.16



a) $T(-1;2)$ $\gamma: x^2+y^2=5 \Rightarrow C(0;0)=0$

$T \in \gamma: (-1)^2+2^2=1+4=5 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: -x+2y+c=0$

$T \in t \Rightarrow 1+2 \cdot 2+c=0 \Leftrightarrow c=-5 \Rightarrow t: -x+2y-5=0$

$\Leftrightarrow t: x-2y+5=0$

b) $T(-5;7)$ $\gamma: (x+2)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow C(-2;3)$

$T \in \gamma: (-5+2)^2+(7-3)^2=9+16=25 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -5+2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 3x-4y+c=0$

$T \in t \Rightarrow 3(-5)-4 \cdot 7+c=0 \Leftrightarrow c=43 \Rightarrow t: 3x-4y+43=0$

c) $T(0;0)$ $\gamma: x^2+y^2=3x-7y$

$x-3x+\frac{9}{4}+y^2+7y+\frac{49}{4}=\frac{9}{4}+\frac{49}{4}$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{7}{2})^2=14 \Rightarrow C(\frac{3}{2};-\frac{7}{2})$

$T \in \gamma: 0+0=0-0 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} 0-\frac{3}{2} \\ 0+\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 3x-7y+c=0$

$T \in t \Rightarrow c=0 \Rightarrow t: 3x-7y=0$

d) $T(-1;2)$ $\gamma: x^2+y^2-2x+6y=19$

$x^2-2x+1+y^2+6y+9=19+1+9$

$(x-1)^2+(y+3)^2=29 \Rightarrow C(1;-3)$

$T \in \gamma: 1+4+2+12=19 \checkmark$

$t \perp (CT) \Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_t \Rightarrow t: 2x-5y+c=0$

$T \in t \Rightarrow -2-10+c=0 \Leftrightarrow c=12 \Rightarrow t: 2x-5y+12=0$

- t_1 tangente à p_1 en A :

$$\vec{AC}_1 = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \vec{n}_{t_1} \Rightarrow t_1: x+y+c=0 \left. \vphantom{\vec{AC}_1} \right\} \Rightarrow t_1: x+y=0$$

et $m_1 = -\frac{1}{1} = \underline{-1}$

- t_2 tangente à p_2 en A :

$$\vec{AC}_2 = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_2} \Rightarrow t_2: x-y+c=0 \left. \vphantom{\vec{AC}_2} \right\} \Rightarrow t_2: x-y-2=0$$

et $m_2 = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$

- $\tan(\varphi) = \left| \frac{1-(-1)}{\underbrace{1+(-1) \cdot 1}_{=0}} \right| \Rightarrow$ l'angle vaut 90° , en effet $m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) = -1$
 $\Leftrightarrow t_1 \perp t_2$

Rem: dans cette deuxième partie d'ex. on n'est pas obligé de déterminer les équations des tangentes. Avec les vecteurs normaux, on peut utiliser la formule :

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, de direction donnée par la droite $2x + y = 7$. $\Leftrightarrow y = -2x + 7$

• $f: x^2 + 10x + y^2 - 2y = -6$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow C(-5; 1) \text{ et } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

• $d: 2x + y - 7 = 0$

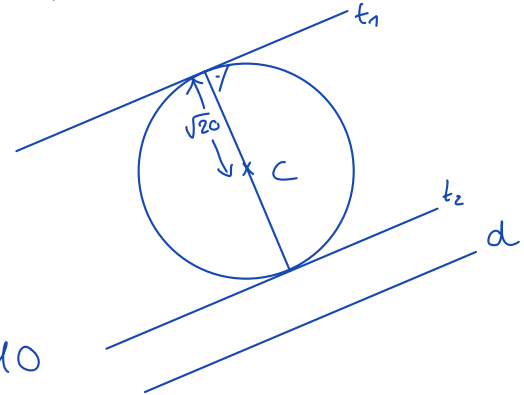
Comme $t \parallel d \Rightarrow t: 2x + y + c = 0$

et $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|2(-5) + 1 + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow |-9 + c| = \sqrt{100} = 10$

$\Leftrightarrow -9 + c = \pm 10$

$\Leftrightarrow c = \begin{cases} 10 + 9 = 19 & \Rightarrow \underline{t_1: 2x + y + 19 = 0} \\ -10 + 9 = -1 & \Rightarrow \underline{t_2: 2x + y - 1 = 0} \end{cases}$



2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2y + 345$.

• $f: x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$

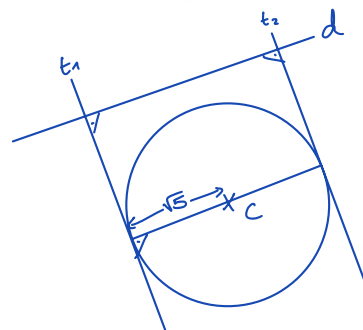
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow C(1; -2) \text{ et } r = \sqrt{5}$

• $d: x - 2y - 345 = 0$

Comme $t \perp d \Rightarrow t: 2x + y + c = 0$

et $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + (-2) + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |c| = 5 \Leftrightarrow c = \pm 5$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{t_1: 2x + y + 5 = 0} \\ \underline{t_2: 2x + y - 5 = 0} \end{cases}$



Ex 2.1.21 $\gamma: x^2 + y^2 = 19 - 2x$ $A(1; 6)$

• $(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 19 + 1$
 $(x+1)^2 + y^2 = 20 \Rightarrow C(-1; 0)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

• A est extérieur au cercle :

$\|\vec{CA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r \quad \checkmark$

• 1) $t: y = mx + h \Leftrightarrow \underline{t: mx - y + h = 0}$

2) $A(1; 6) \in t \Rightarrow m - 6 + h = 0 \Leftrightarrow h = 6 - m$

substitution

$\Rightarrow \underline{t: mx - y + 6 - m = 0} \quad \otimes$

3) $\delta(C; t) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|-m - 0 + 6 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|6 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow |6 - 2m| = \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2$

$\otimes \otimes \Leftrightarrow (6 - 2m)^2 = 20(m^2 + 1)$

$\Leftrightarrow 36 - 24m + 4m^2 = 20m^2 + 20$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 24m - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \Delta = 25$

$\Leftrightarrow \underline{m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}} = \begin{cases} \underline{1/2} & \xrightarrow{\otimes} t_1: \frac{1}{2}x - y + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow \underline{t_1: x - 2y + 11 = 0} \\ \underline{-2} & \xrightarrow{\otimes} t_2: -2x - y + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{t_2: 2x + y - 8 = 0} \end{cases}$

Avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ avec $A(e_1, e_2) = A(1; 6)$

$$6 - 0 = m \underbrace{(1 - (-1))}_2 \pm \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$6 - 2m = \pm \sqrt{20} \sqrt{m^2 + 1} \quad | \quad ()^2$$

idem plus haut

~~*)*)~~

⋮

$$\Leftrightarrow \underline{m_{1,2}} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \underline{\frac{1}{2}} \\ \underline{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1: y = \frac{1}{2}x + h \quad \text{et} \quad A(1; 6) \in t_1 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} + h \Leftrightarrow h = \frac{11}{2}$$

idem plus haut

$$\Rightarrow t_2: y = -2x + h \quad \text{et} \quad A(1; 6) \in t_2 \Rightarrow 6 = -2 + h \Leftrightarrow h = 8$$

idem plus haut

Ex 2.1.22

$$\gamma: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$$

$A(6;5)$

$$\bullet (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow C(1; -2) \text{ et } r=5$$

A est extérieur au cercle :

$$\|\vec{CA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{35+49} = \sqrt{84} \cong 8, \dots > 5 = r \quad \checkmark$$

avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$ avec $A(e_1; e_2) = A(6;5)$

$$5 + 2 = m(6 - 1) \pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 7 - 5m = \pm 5\sqrt{m^2+1} \quad | \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow 49 - 70m + 25m^2 = 25(m^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 24 = 70m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

$$\Rightarrow t_1: y = \frac{12}{35}x + h \text{ et } A(6;5) \in t \Rightarrow 5 = \frac{12}{35} \cdot 6 + h \Leftrightarrow h = \frac{103}{35}$$

$$\Rightarrow t_1: \frac{12}{35}x - y + \frac{103}{35} = 0 \Leftrightarrow \underline{t_1: 12x - 35y + 103 = 0}$$

La 2^e tangente est verticale ! $\Rightarrow \underline{t_2: X = 6}$ car passe par $A(6;5)$

Rem : Il y a toujours 2 tgtes à un cercle passant par 1 pt. ext.

lorsqu'on ne trouve qu'une valeur pour m , l'autre tangente est verticale ($m \rightarrow \infty$) d'équation $x = e_1$ avec $E(e_1; e_2)$

ou sans formule :

• 1) $t: y = mx + h \Leftrightarrow \underline{t: mx - y + h = 0}$

2) $A(6;5) \in t \Rightarrow 6m - 5 + h = 0 \Leftrightarrow h = 5 - 6m$

substitution

$\Rightarrow \underline{t: mx - y + 5 - 6m = 0}$

3) $\delta(C; t) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \frac{|m+2+5-6m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|7-5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$

$\Leftrightarrow |7-5m| = 5\sqrt{m^2+1} \quad |(\)^2$

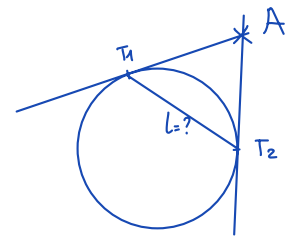
$\Leftrightarrow (7-5m)^2 = 25(m^2+1)$

idem plus haut

⋮

Ex 2.1. 24

$A(4; -4)$ et $\gamma: x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5$



• $\gamma: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = -5 + 9 + 1$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \Rightarrow C(3; -1)$ et $r = \sqrt{5}$

• $\|\vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > \sqrt{5} \Rightarrow A$ est ext. au cercle

• On cherche l'équation des tangentes à γ en A (sans formule)

1) $t: y = mx + h$

$A \in t \Rightarrow -4 = 4m + h \Leftrightarrow h = -4 - 4m \Rightarrow t: y = mx - 4 - 4m$

$\Leftrightarrow \underline{mx - y - 4 - 4m = 0}$

2) $S(C; t) = r \Leftrightarrow \frac{|m \cdot 3 - (-1) - 4 - 4m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |-m-3| = \sqrt{5} \sqrt{m^2+1} \quad |()|^2$

$\Leftrightarrow (-m-3)^2 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 = 5m^2 + 5$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{t_1: 2x - y - 12 = 0}$
 $\Rightarrow \underline{t_2: -\frac{1}{2}x - y - 2 = 0} \Leftrightarrow \underline{x + 2y + 4 = 0}$

• $\{\bar{t}\} = t_1 \cap \gamma: \begin{cases} 2x - y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 12 \quad \left. \begin{array}{l} \text{on substitue} \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow x^2 + (2x-12)^2 = 6x - 2(2x-12) - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 48x + 144 = 6x - 4x + 24 - 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 50x + 125 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=2 \cdot 5 - 12 = -2 \Rightarrow \underline{T_1(5; -2)}$$

$$\bullet \{T_2\} = t_2 \cap \gamma: \begin{cases} x+2y+4=0 \\ x^2+y^2=6x-2y-5 \end{cases} \Rightarrow x = -2y-4 \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x+2y+4=0 \\ x^2+y^2=6x-2y-5 \end{cases}} \right\} \text{ on substitute}$$

$$\Rightarrow (-2y-4)^2 + y^2 = 6(-2y-4) - 2y - 5$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 16y + 16 + y^2 = -12y - 24 - 2y - 5$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 30y + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow x = -2 \cdot (-3) - 4 = 2 \Rightarrow \underline{T_2(2; -3)}$$

$$\bullet L = \|\vec{u}_{T_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+1} = \underline{\underline{\sqrt{10} u}}$$