Problème 1.

On souhaite fabriquer des boîtes de conserve de petits pois ayant un volume de 785 cm^3. Déterminer les dimensions de cette boîte de manière à minimiser la quantité de fer blanc utilisée.

Problème 2.

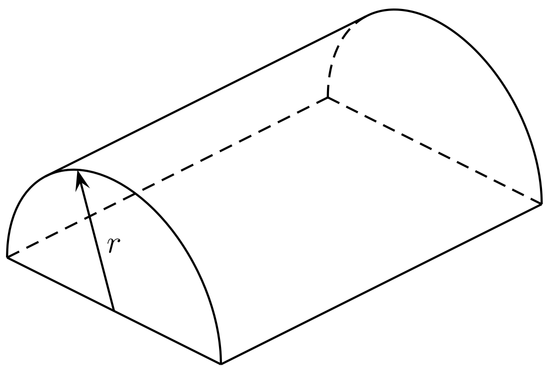
On désire construire une caisse en bois massif (sans couvercle) en forme de parallélépipède rectangle de volume égal à 5600 cm^3. On nomme x la largeur de la caisse (en cm). La hauteur de cette caisse mesure le double de la largeur.

Le bois prévu pour le fond coûte 0,10 CHF par cm^2, celui pour les faces latérales coûte 0,05 CHF par cm^2.

Déterminer les dimensions de la caisse pour lesquelles le coût de fabrication est minimal, puis calculer ce coût.

Problème 3. *Examen 2012*

On souhaite construire une serre de 3750 m^3 de volume.
On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon r (en m) dont le prix est de 35 fr./m^2 et un toit rectangulaire dont le prix est de 15 fr./m^2, que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.



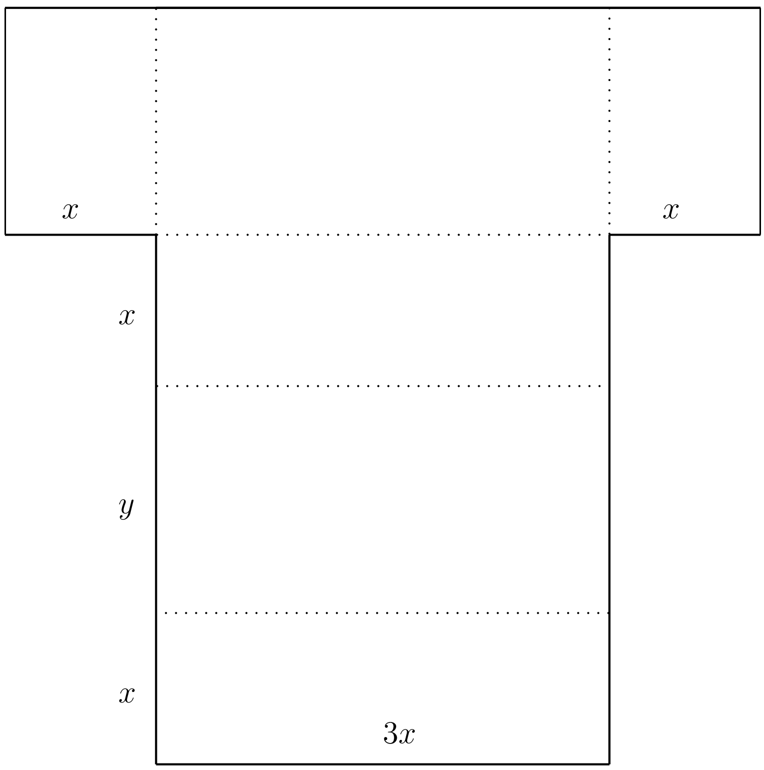
a) Montrer que coût total de cette serre en fonction du rayon r des parois est donné par

$$C(r) = \frac{35\pi r^3 + 112500}{r}$$

b) Déterminer les dimensions de la serre de coût minimal et déterminer ce coût.

Problème 4. *Examen 2015*

On souhaite fabriquer une boîte en forme de parallélépipède rectangle de volume $2304\ \text{cm}^3$.
On découpe alors dans une feuille de carton le développement de la boîte comme donné dans la figure ci-dessous.



a) Montrer que l'aire totale de carton nécessaire à la fabrication de la boîte est donnée par
$$A(x) = \frac{6(x^3 + 1024)}{x}$$

b) Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire de carton nécessaire à sa fabrication ? Justifier par une étude de croissance.

Problème 5.

Une piscine a observé que le nombre de clients lors de la $x^{\text{ème}}$ journée de la saison est donné par la fonction $f(x) = \dfrac{60'000x}{x^2 + 6400}$. La saison commence le 1er mai.

A quelle date aura-t-on le nombre maximal de nageurs et quel sera ce nombre ?

Problème 6.

a) Gérard a une petite entreprise où il fabrique des sacs à main en cuir. En considérant ses frais fixes et ses frais variables, il a calculé que la fonction f donnée par

$$f(x) = 6\,300 + 10x + \frac{x^2}{28}$$

représente le coût total de fabrication de x sacs à main. Combien Gérard doit-il fabriquer de sacs à main s'il veut obtenir un coût de production unitaire minimal ?

b) Gérard décide de vendre la totalité des sacs à main qu'il fabrique au prix de 70 fr la pièce. Combien doit-il en fabriquer pour obtenir un profit maximal ?

Problème 7.

On veut construire un restaurant de spécialités italiennes. On sait que si l'on aménage 120 places, on obtiendra un profit mensuel de 48 fr par place. De plus, pour chaque place au-delà de 120, le profit mensuel par place diminue de 25 centimes. Combien de places doit-on aménager si l'on veut obtenir un profit mensuel maximal ?